



# Arithmétique dans $\mathbb{N}$



Auteur : S. El jaafari

---

## Table des matières

|                                                                       |          |
|-----------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>I Ensemble des entiers naturels</b>                                | <b>2</b> |
| 1 Vocabulaires et notations . . . . .                                 | 2        |
| 2 Opérations dans l'ensemble des entiers naturels . . . . .           | 2        |
| <b>II Entiers naturels pairs - Entiers naturels impairs</b>           | <b>2</b> |
| <b>III Diviseurs et multiples d'un entier naturel</b>                 | <b>3</b> |
| 1 Multiples d'un entier naturel . . . . .                             | 4        |
| 2 Diviseurs d'un entier naturel . . . . .                             | 4        |
| 3 Critères de divisibilité . . . . .                                  | 5        |
| <b>IV Les entiers naturels premiers</b>                               | <b>5</b> |
| 1 Nombres entiers premiers . . . . .                                  | 5        |
| 2 Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers . . . . . | 7        |
| <b>V Plus grand diviseur commun - Plus petit multiple commun</b>      | <b>8</b> |
| 1 Plus grand diviseur commun de deux entiers . . . . .                | 8        |
| 2 Plus petit multiple commun de deux entiers . . . . .                | 9        |

---

## I – Ensemble des entiers naturels

### 1. Vocabulaires et notations

#### Définition

- Tous les nombres entiers naturels forment un ensemble, noté  $\mathbb{N}$ , et appelé **l'ensemble des entiers naturels**. Donc  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- L'ensemble des entiers naturels non nuls est noté  $\mathbb{N}^*$  et on a :  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .
- Si  $n$  est un entier naturel, on écrit :  $n \in \mathbb{N}$  et on lit « $n$  appartient à  $\mathbb{N}$ ».
- Si  $n$  n'est pas un entier naturel on écrit  $n \notin \mathbb{N}$  et on lit « $n$  n'appartient pas à  $\mathbb{N}$ ».

### 2. Opérations dans l'ensemble des entiers naturels

#### Proposition

- La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.  
Autrement dit : Si  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  alors  $n + m \in \mathbb{N}$ .
- Le produit de deux entiers naturels est un entier naturel.  
Autrement dit : Si  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  alors  $n \times m \in \mathbb{N}$ .
- La différence et le quotient de deux entiers naturels n'est pas nécessairement un entier naturel.  
Autrement dit :  $21 - 4 = 17 \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{51}{17} = 3 \in \mathbb{N}$ ,  $5 - 18 = -13 \notin \mathbb{N}$ ,  $\frac{7}{5} \notin \mathbb{N}$

## II – Entiers naturels pairs - Entiers naturels impairs

#### Définition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- L'entier naturel  $n$  est dit **pair** si, et seulement si, il est divisible par 2.
- L'entier naturel  $n$  est dit **impair** si, et seulement si, il n'est pas pair (i.e. il n'est pas divisible par 2).

#### Proposition 1 (Critère de divisibilité par 2)

- Un entier naturel est pair si, et seulement si son chiffre d'unité est : 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est impair si, et seulement si son chiffre d'unité est : 1, 3, 5, 7 ou 9.
- Un nombre entier naturel ne peut jamais être à la fois pair et impair.

#### Proposition 2 (Caractérisation de la parité d'un entier)

- Un entier naturel  $n$  est **pair** si, et seulement si, il s'écrit sous forme :  $n = 2k$  où  $k \in \mathbb{N}$ .
- Un entier naturel  $n$  est **impair** si, et seulement si, il s'écrit sous forme :  $n = 2k + 1$  où  $k \in \mathbb{N}$ .

 **Méthode**

Pour montrer qu'un entier naturel  $n$  est :

- pair, il suffit de trouver un entier naturel  $k$  tel que  $n = 2k$ .
- impair, il suffit de trouver un entier naturel  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ .

**Proposition 3 (Parité et opérations sur les entiers naturels)**

- La somme de deux entiers naturels de même parité est un entier pair.  
Autrement dit : **pair + pair = pair** et **impair + impair = pair**.
- La somme de deux entiers naturels de parités différentes est un entier impair.  
Autrement dit : **pair + impair = impair** et **impair + pair = impair**.
- Si l'un au moins des deux entiers naturels est pair, alors leur produit est un entier naturel pair.  
Autrement dit : **pair  $\times$  pair = pair** et **pair  $\times$  impair = pair**.
- Le produit de deux entiers naturels impairs est un entier impair.  
Autrement dit : **impair  $\times$  impair = impair**.

**Proposition 4**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

- Si  $n$  est pair, alors  $n^2$  est aussi pair.
- Si  $n$  est pair, alors  $n^p$  est aussi pair.
- Si  $n$  est impair, alors  $n^2$  est aussi impair.
- Si  $n$  est impair, alors  $n^p$  est aussi impair.
- $n(n + 1)$  est toujours pair.

**Exercice**

Soit  $n$  un entier naturel.

- 1/ Montrer que  $3 + 5^{n+1}$  est un entier pair.
- 2/ Étudier la parité de l'entier  $17 + 2^{n+3}$ .
- 3/ Montrer que l'entier naturel  $A = n^2 + 3n + 6$  est pair.
- 4/ Étudier la parité de l'entier naturel  $B = N^3 - n$ .

### III – Diviseurs et multiples d'un entier naturel

## 1. Multiples d'un entier naturel

### Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $b \neq 0$ .

Dire que  $a$  est un multiple de  $b$  signifie que  $a = b \times k$  où  $k \in \mathbb{N}$ .

### Proposition

- Les multiples d'un entier naturel non nul  $a$  sont :  $0; a; 2a; \dots; na$  où  $n \in \mathbb{N}$ .
- L'ensemble  $\mathcal{M}(a) = \{0; a; 2a; \dots; na \dots\}$  est l'ensemble de tous les multiples positifs de  $a$ .  
On le note :  $\mathcal{M}(a) = a\mathbb{N}$ .
- Chaque entier naturel non nul admet une infinité de multiples dans  $\mathbb{N}$ .
- 0 admet un seul multiple dans  $\mathbb{N}$  qui est : 0.
- On a :  $\mathcal{M}(1) = \mathbb{N}$  et  $\mathcal{M}(2) = 2\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers pairs.

## 2. Diviseurs d'un entier naturel

### Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $b \neq 0$ .

Dire que  $b$  est un diviseur de  $a$  (ou que  $b$  divise  $a$ ) signifie que  $a = bk$  où  $k \in \mathbb{N}$ .

### Proposition 1

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $b \neq 0$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $a$  est un multiple de  $b$ .
- $a$  est divisible par  $b$ .
- $b$  est un diviseur de  $a$ .
- $b$  divise  $a$  (on note  $b \mid a$ ).

### Remarque

- 0 est un multiple de tous les entiers naturels.
- 1 est un diviseur de tous les entiers naturels.
- Tous les entiers naturels non nuls sont divisibles par 1 et par eux même.

### Proposition 2

Soient  $a, b, d$  trois entiers naturels tels que  $a < b$  et  $d \neq 0$  et  $d$  est un diviseur de  $a + b$ . Alors :

- $d$  divise  $a + b$  et  $d$  divise  $b - a$ .

- $d$  divise  $na$  et  $d$  divise  $a^p$  où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .
- $d$  divise  $na + mb$  où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

**Exercice**

- 1/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $2^n + 2^{n+1}$  est un multiple de 3.
- 2/ Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a > 5$ . En posant  $n = a + 3$  et  $m = a - 5$ , montrer que chaque diviseur commun de  $n$  et de  $m$  divise 8.
- 3/ Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . En posant  $a = 13d + 7$  et  $b = 5d - 3$ , montrer que tout diviseur commun entre  $a$  et  $b$  divise 74.

### 3. Critères de divisibilité

**Proposition Critères de divisibilité**

Un entier naturel est divisible par :

- **2** si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- **3** si la somme de tous ses chiffres est divisible par 3.
- **5** si le chiffre des unités est 0 ou 5.
- **9** si la somme de tous ses chiffres est divisible par 9.

## IV – Les entiers naturels premiers

### 1. Nombres entiers premiers

**Définition**

Un entier naturel est dit **premier** si, et seulement s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

**Proposition 1**

- 0 n'est pas premier car 0 admet une infinité de diviseurs (plus que 2 diviseurs).
- 1 n'est pas premier car il admet un seul diviseur (moins de 2 diviseurs).
- Le seul entier premier et pair est 2.
- Tous les entiers premiers supérieurs strictement à 2 sont impairs.

**Crible d'Eratosthène** : Les entiers premiers inférieurs à 100 sont en gras.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Méthode**

La méthode consiste à procéder par élimination :

- on élimine 1 qui n'est pas premier.
- On garde 2 et on élimine tous les multiples de 2.
- On garde 3 et on élimine tous les multiples de 3.
- On garde 5 et on élimine tous les multiples de 5...

**Proposition 2**

Les entiers premiers inférieurs à 100 sont :

**2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.**

**Théorème de primalité**

- Chaque entier naturel supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
- Pour chaque entier naturel supérieur ou égal à 2, le plus petit diviseur distinct de 1 est premier.
- Un entier naturel  $n$  n'est pas premier si, et seulement si, il admet un diviseur premier  $p$  vérifiant  $p \leq \sqrt{n}$ .

**Méthode**

Pour étudier la primalité d'un entier naturel, on procède comme suit :

- On calcule  $\sqrt{n}$ .
- On détermine tous les entiers naturels premiers  $p$  tels que  $p \leq \sqrt{n}$ .

- On teste la divisibilité de  $n$  par chacun de ces entiers premiers.
- Si aucun de ces entiers premiers ne divise  $n$ , alors  $n$  est premier.
- Si on trouve que l'un de ces entiers premiers divise  $n$ , alors  $n$  n'est pas premier.

**Remarque**

L'ensemble **des nombres entiers naturels premiers** est infini.

## 2. Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

**Définition**

Décomposer un entier naturel en un produit de facteurs premiers revient à l'écrire sous forme de produit de tous ses diviseurs premiers.

**Proposition 1**

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut se décomposer, d'une manière unique, en un produit de facteurs premiers.

**Méthode : Comment décomposer en produit de facteurs premiers 56100**

On effectue les divisions successives dans l'ordre croissant de 56100 par ses diviseurs premiers jusqu'à ce qu'on arrive à un quotient égal à 1. La décomposition de 56100 est le produit de tous ses diviseurs premiers. On schématise l'opération sous la forme suivante :

|       |    |
|-------|----|
| 56100 | 2  |
| 28050 | 2  |
| 14025 | 3  |
| 4675  | 5  |
| 935   | 5  |
| 187   | 11 |
| 17    | 17 |
| 1     |    |

Alors la décomposition de 56100 est :  $56100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11 \times 17$ .

**Théorème**

Pour tout entier naturel  $a$  tel que  $a > 1$ , il existe  $n$  entiers naturels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et  $n$  entiers naturels premiers distincts deux à deux  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tels que :  $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$

**Proposition 2**

Soit  $a$  un entier naturel tel que  $a > 1$  dont la décomposition en produit de facteurs premiers est

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}.$$

Alors le nombre des diviseurs entiers naturels de  $a$  est :  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(\dots)(1 + \alpha_n)$ .

## V – Plus grand diviseur commun - Plus petit multiple commun

### 1. Plus grand diviseur commun de deux entiers

**Définition : Notation**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Le **plus grand diviseur commun** de  $a$  et  $b$  est noté par :  $PGCD(a, b)$  ou  $a \wedge b$

**Méthode 1 : PGCD et diviseurs**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que leurs diviseurs sont faciles à déterminer. Pour déterminer le  $PGCD(a, b)$  :

- On détermine tous les diviseurs de  $a$ .
- On détermine tous les diviseurs de  $b$ .
- On détermine tous les diviseurs communs de  $a$  et  $b$ .
- Le  $PGCD(a, b)$  est le plus grand de ces diviseurs communs.

**Méthode 2 : PGCD et décomposition en produit de facteurs premiers**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $a > 1$  et  $b > 1$ . Pour déterminer le  $PGCD(a, b)$  :

- On détermine la décomposition en produit de facteurs premiers de  $a$ .
- On détermine la décomposition en produit de facteurs premiers de  $b$ .
- On écrit les facteurs premiers communs dans les deux décompositions.
- On élève ses facteurs aux plus petits exposants dans les deux décompositions. On trouve alors le  $PGCD(a, b)$ .

**Exemple**

En utilisant les deux méthodes, calculer  $PGCD(126, 980)$ .

## 2. Plus petit multiple commun de deux entiers

### Définition : Notation

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Le **plus petit multiple commun** de  $a$  et  $b$  est noté  $PPCM(a, b)$ .

### Méthode 1 : PPCM et multiples

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

- On détermine simultanément les multiples de  $a$  et ceux de  $b$  jusqu'à ce qu'on arrive à un multiple commun des deux entiers  $a$  et  $b$ .
- Le premier multiple commun non nul est le  $PPCM(a, b)$ .

### Remarque

Pour déterminer les multiples d'un entier naturel non nul  $n$ , on le multiplie successivement par les entiers naturels, et on obtient :  $\mathcal{M}(n) = \{0; n, 2n, 3n, \dots\}$ .

### Méthode 2 : PPCM et décomposition en produit de facteurs premiers

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $a > 1$  et  $b > 1$ . Pour déterminer le  $PGCD(a, b)$  :

- On détermine la décomposition en produit de facteurs premiers de  $a$ .
- On détermine la décomposition en produit de facteurs premiers de  $b$ .
- On prend tous les facteurs premiers utilisés dans les deux décompositions de  $a$  et de  $b$ .
- On élève ces facteurs premiers au plus grand exposant dans les deux décompositions.
- Ainsi on obtient la décomposition en produit de facteurs premiers du  $PPCM(a, b)$ .

### Exemple

En utilisant les deux méthodes, calculer  $PPCM(126, 980)$ .

### Proposition : Propriétés du PGCD et du PPCM

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

- $PGCD(a, b) = PGCD(b, a)$  et  $PPCM(a, b) = PPCM(b, a)$ .
- $PGCD(a, 1) = 1$  et  $PPCM(a, 1) = a$ .
- $PGCD(a, a) = a$  et  $PPCM(a, a) = a$ .
- $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$ .

**Méthode 3 : Relation PPCM et PGCD**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Pour calculer  $PPCM(a, b)$  :

- On calcule  $PGCD(a, b)$ .
- On applique la formule  $PPCM(a, b) = \frac{ab}{PGCD(a, b)}$ .

