

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Vecteurs de l'espace

1 BAC SM

S. EL JAAFARI

I- Notion de vecteur dans l'espace

1- Définition

Définition :

Soient A et B deux points de l'espace.

1) Si $A \neq B$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :

- Sa direction est celle de la droite (AB) .
- Son sens de A vers B.
- Sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB , et on écrit $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

2) Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$ et on a : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

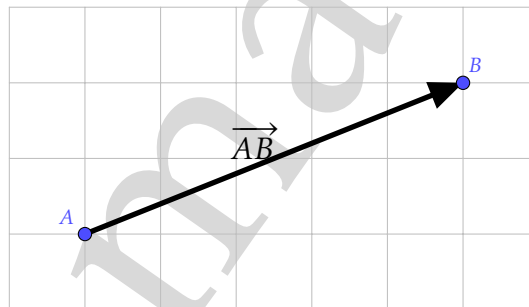


Figure 1

Remarque : Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

- le point A est l'origine.
- le point B est l'extrémité.

2- Égalité de deux vecteurs - Opposé d'un vecteur

Définition :

Les deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} (AB) \parallel (CD) \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ ont le même sens} \\ \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| \end{cases}$

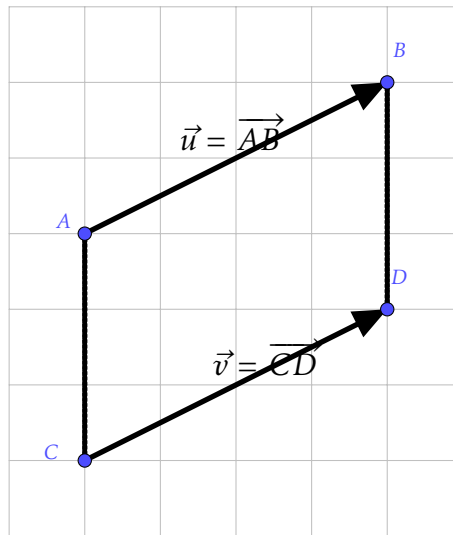


Figure 2

Proposition 1 :

Soient A, B, C et D des points de l'espace tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ le quadrilatère ABDC est un parallélogramme

Proposition 2 :

Soit O un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur. Alors il existe un unique point M de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Remarque :

Soient A, B et C trois points de l'espace. Alors il existe un unique point M de l'espace tel que ABMC soit un parallélogramme.

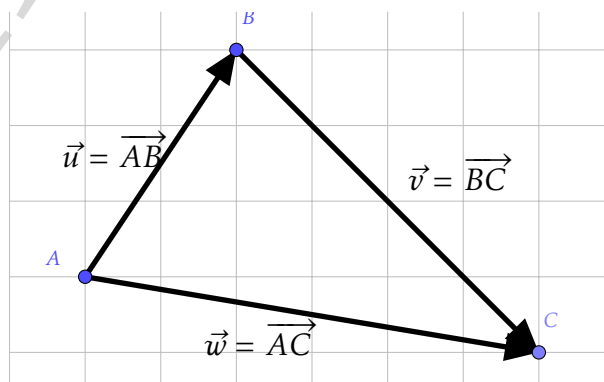
II- Opérations sur les vecteurs dans l'espace

1- Addition des vecteurs

Définition :

Soient A, B et C trois points de l'espace. On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ et on écrit $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Proposition 1 : (Relation de Chasles)

Pour tous les points P, M et Q de l'espace, on a : $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ}$.

Proposition 2 : (Règle du parallélogramme)

Le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme si, et seulement si $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

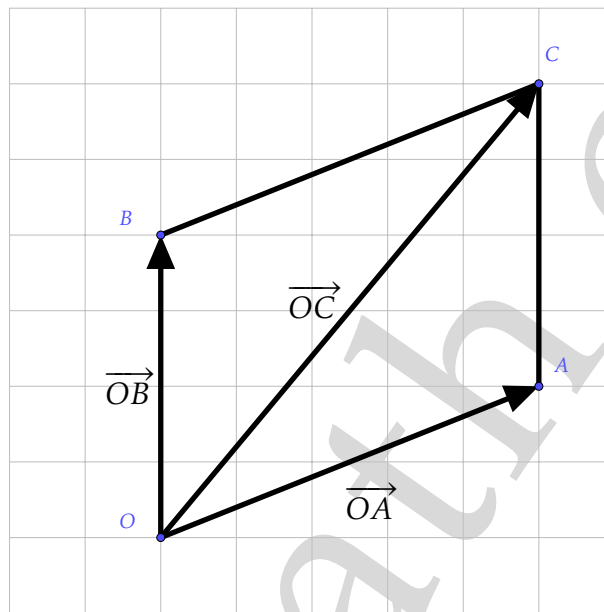


Figure 4

Proposition 3 : (Propriétés de l'addition des vecteurs dans l'espace)

Pour tous les vecteurs de l'espace ; $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

2- Multiplication d'un vecteur par un réel**Définition :**

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $\vec{v} = k.\vec{u}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens si $k > 0$, et ils sont de sens opposés si $k < 0$.
- $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Remarque :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k , on a :

- $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

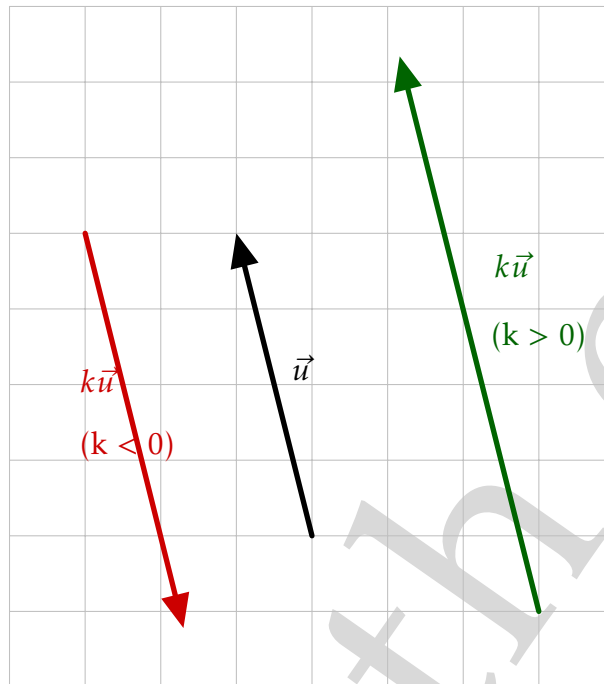


Figure 5

Proposition :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et pour tous réels α et β , on a :

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha \times \beta)\vec{u}$.
- $\alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -(\alpha \times \beta)\vec{u}$.

III- Vecteurs colinéaires dans l'espace**1- Définition****Définition :**

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

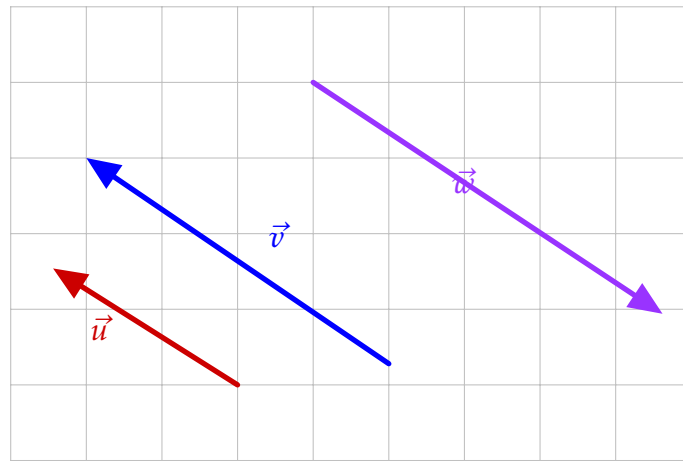


Figure 6

Proposition :

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2- Droite dans l'espace**Définition 1 :**

Soient A et B deux points de l'espace.

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB).

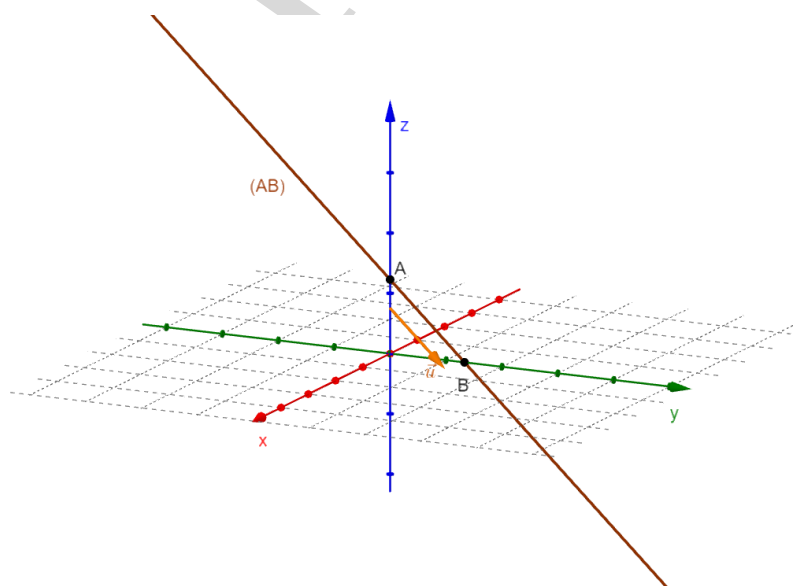


FIGURE 1 – 3D

Définition 2 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

L'ensemble $D(\vec{u})$ de tous les vecteurs de l'espace colinéaires avec $\vec{u}$ est appelée **la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u}$** .

Autrement dit : $D(\vec{u}) = \{ \vec{v} / \vec{v} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \}$.

Remarque :

$D(\vec{u}) = D(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3- Caractérisation vectorielle d'une droite**Définition :**

Soit A un point de l'espace, et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on la note $D(A, \vec{u})$.

$D(A, \vec{u}) = \{ M / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \}$.

Remarques :

- Tout vecteur $\vec{v} = k\vec{u} / k \neq 0$ est aussi un vecteur directeur de la droite $D(A, \vec{u})$.
- Si $B \in D(A, \vec{u})$ alors $D(A, \vec{u}) = D(B, \vec{u})$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $D(A, \vec{u}) = D(A, \lambda\vec{u})$
- Si A et B sont deux points de l'espace, alors : $M \in (AB) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

IV- Vecteurs coplanaires dans l'espace**1- Définition****Définition 1 :**

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe quatre points A, B, C et D de l'espace tels que :

- les points A, B, C et D appartiennent à un même plan
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

Remarque :

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est coplanaire avec deux vecteurs quelconques de l'espace.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de l'espace, alors ils sont coplanaires avec un vecteur quelconque $\vec{w}$ de l'espace.

Proposition 1 :

Les vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement s'il existe (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

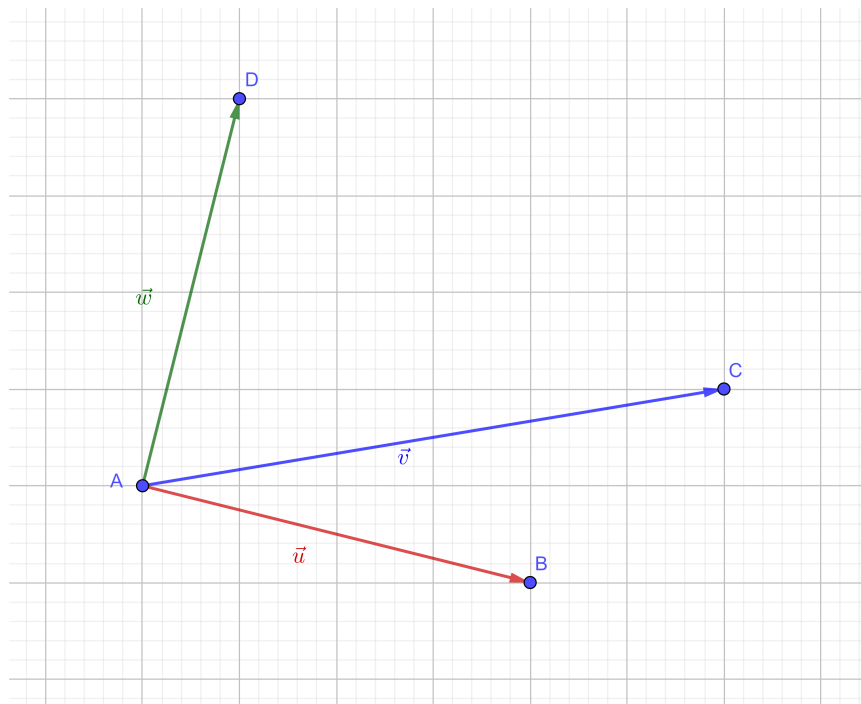


FIGURE 2 – Figure 3D

Proposition 2 :

Soient A, B, C et M quatre points de l'espace.

Les points A, B, C et M sont **coplanaires** si, et seulement si il existe (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

2- Plan dan l'espace**Définition 1 :**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $P(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé **le plan vectoriel de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** .

Autrement dit : $P(\vec{u}, \vec{v}) = \{ \vec{w} / \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

Définition 2 :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est **le plan de l'espace qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$** .

On a : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{ M / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Remarques :

- Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Alors (ABC) est le plan défini par :
 $M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace, alors on a :
 $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{*2} \quad P(A, \vec{u}, \vec{v}) = P(A, \lambda\vec{u}, \mu\vec{v})$.

V- Parallélisme dans l'espace

1- Parallélisme de deux droites dans l'espace

Définition :

Soient A et B deux points de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Les droites $D(A, \vec{u})$ et $D(B, \vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Autrement dit : $D(A, \vec{u}) \parallel D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \text{ tel que } \vec{v} = k\vec{u}.$

Remarque :

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors :

$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \text{ tel que } \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}.$

2- Parallélisme d'une droite et d'un plan dans l'espace

Définition :

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Autrement dit : $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}.$

3- Parallélisme de deux plans dans l'espace

Définition :

Soient $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si, et seulement si :

$\begin{cases} \vec{u}, \vec{u}' \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires} \\ \vec{v}, \vec{v}' \text{ et } \vec{u} \text{ sont coplanaires} \end{cases}$

Autrement dit : $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{u}' = x\vec{u} + y\vec{v} \\ \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 : \vec{v}' = x'\vec{u} + y'\vec{v} \end{cases}.$