



GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Étude analytique de l'espace

1 Bac SM

S. EL JAAFARI



Dans tout le chapitre, l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I- Vecteurs dans l'espace

Définition : 1

- Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Le triplet (x, y, z) est appelé **coordonnées du point M dans le repère** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note

$$M(x, y, z) \text{ ou } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Le triplet (x, y, z) est appelé **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{OM}$ dans ce repère, et on note $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ ou $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Proposition : 1

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un réel.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Le milieu I du segment $[AB]$, a pour coordonnées $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.
- La distance entre A et B est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \quad ; ; \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \quad ; ; \quad -\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$.

Définition : 2

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$.

- Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} =$

$$x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

- Les déterminants $\Delta_x = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = xz' - x'z$;

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y \text{ sont appelés les déterminants extraits des vecteurs } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Proposition : 2

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.
- Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.
- Les points A, B, C et D sont alignés $\Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$.

II- Produit scalaire dans l'espace

1- Expressions et propriétés du produit scalaire

Définition

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et A, B, C trois points de l'espace.

- expression trigonométrique :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- expression analytique :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- expression géométrique :** Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$.
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Norme du vecteur $\vec{u}$:** $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Proposition : Propriétés du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

- Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$; $\vec{u} \cdot \vec{j} = y$; $\vec{u} \cdot \vec{k} = z$.

2- Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- $\|\alpha \cdot \vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- **Inégalité triangulaire** : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si A, B et C sont des points de l'espace, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

3- Vecteurs orthogonaux

Définition

soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et A, B, C trois points de l'espace.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

III- Produit vectoriel dans l'espace

1- Définition et propriétés

Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- Sa direction est perpendiculaire au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Son sens est tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct.
- Sa norme est : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$.

Proposition : Propriétés du produit vectoriel

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
- $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Proposition : Composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans une base orthonormée directe

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée positive de l'espace, alors :

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} & \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} & \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}. \end{array}$$

Proposition : Expression analytique du produit vectoriel

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée positive de l'espace et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

Proposition : Applications du produit vectoriel

- L'aire d'un triangle ABC est : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.
- L'aire du parallélogramme $ABCD$ est : $\mathcal{A}(ABCD) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.
- $|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

IV- Droites dans l'espace**Définition**

Soit (D) une droite passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

- $M \in (D) \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{AM} = k\vec{u}$.

- $M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

- Ce système s'appelle **une représentation paramétrique de la droite (D)** .

Proposition : Position relative de deux droites dans l'espace

Soient (D) la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et la droite (D') passant par un point B et de vecteur $\vec{v}$.

- Les droites (D) et (D') sont strictement parallèles : $(D) \parallel (D') \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Les droites (D) et (D') sont confondues : $(D) = (D') \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ B \in (D) \end{cases}$.
- Les droites (D) et (D') sont sécantes $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$.
- Les droites (D) et (D') sont non coplanaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont non coplanaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \neq 0$.

Proposition : Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ son vecteur directeur, et soit B un point de l'espace. Alors la distance du point B à la droite (D) est le nombre réel positif :

$$d(B, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

V- Plans dans l'espace**1- Représentation paramétrique d'un plan****Définition**

Soit (P) un plan passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$.

- $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \text{ et } \vec{v}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$.
- $M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad ((t, t') \in \mathbb{R}^2)$.
- Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad ((t, t') \in \mathbb{R}^2)$ est appelé **une représentation paramétrique du plan (P)** .

2- Équation cartésienne d'un plan**Définition**

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) la plan passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$.

- $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ où
 $a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$; $b = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$; $c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$; $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$
- L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée **une équation cartésienne** du plan $(\mathcal{P})$.

Proposition : Equation cartésienne d'un plan

Soit $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul et A un point et k un nombre réel.

L'ensemble des point $M(x, y, z)$ de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont une équation cartésienne est : $ax + by + cz + d = 0$

3- Vecteur normal à un plan

Définition : Vecteur normal à un plan

Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et $(\mathcal{P})$ un plan.

On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal au plan** $(\mathcal{P})$ si, et seulement si toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

Proposition : 1

Soit $(\mathcal{P})$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soit un vecteur $\vec{n}$. Alors :

$\vec{n}$ est un **vecteur normal** au plan $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Proposition : 2

Soient a, b et c trois réels tels que : $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble

$(\mathcal{P}) = \{M(x, y, z) / ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$.

4- Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Proposition : Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

- Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Inversement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

5- Équation cartésienne d'un plan passant par trois points non alignés

Proposition

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- Une équation cartésienne du plan (ABC) est donnée par :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

6- Position relative d'une droite et d'un plan

Proposition : 1

Soient $(\mathcal{D})(A, \vec{u})$ une droite et $(\mathcal{P})(B, \vec{v}, \vec{w})$ un plan de l'espace.

- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ et $A \in (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{P})$.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ et $A \notin (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$, alors $(\mathcal{D})$ coupe le plan $(\mathcal{P})$ en un point.

Proposition : 2

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère une droite $(\mathcal{D})$ passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, et un plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors :

$$(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}) \Leftrightarrow a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

- Si $A \in (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{P})$.
- Si $A \notin (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles.

7- Position relative de deux plans

Proposition : 1

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. Alors :

- $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Si $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$, alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent selon une droite de vecteur directeur $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.
- $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Proposition : 2

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Alors :

- $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.
- En particulier si $a_1 b_1 c_1 \neq 0$, alors : $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$.

Remarque

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles $\Leftrightarrow \mathcal{P}_1 \not\parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

VI- Étude analytique de La sphère dans l'espace**1- Définition****Définition**

Soit Ω un point de l'espace et R un nombre réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

On la note $(\mathcal{S})(\Omega, R)$.

En plus si A et B sont deux points de la sphère $(\mathcal{S})(\Omega, R)$, on dit que le segment $[AB]$ est un diamètre de la sphère $(\mathcal{S})(\Omega, R)$ si le centre Ω est le milieu du segment $[AB]$.

2- Équation cartésienne d'une sphère**Proposition**

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère un point $\Omega(a, b, c)$ et R un nombre réel positif.

Une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})(\Omega, R)$ est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$$

3- Représentation paramétrique d'une sphère**Proposition**

Soit $(\mathcal{S})$ la sphère de centre un point $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R .

- $M(x, y, z) \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases}$
- Le système précédent est appelé **une représentation paramétrique** de la sphère $(\mathcal{S})$.

4- Ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ **Proposition**

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{S})$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombres réels. Alors :

- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, alors $(\mathcal{S})$ est la sphère de centre le point $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, alors $(\mathcal{S}) = \{\Omega(a, b, c)\}$.
- Si $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, alors $(\mathcal{S}) = \emptyset$.

5- Ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Proposition

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$.

- L'ensemble $(\mathcal{S})$ des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
- Une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ est donnée par :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

6- Intersection d'une sphère et d'une droite

Proposition

Soit $(\mathcal{S})(\Omega, R)$ une sphère et $((\mathcal{D}))$ une droite de l'espace $\mathcal{E}$.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $((\mathcal{D}))$ et $d = d(\Omega, ((\mathcal{D})))$.

- si $d > R$, alors $((\mathcal{D})) \cap (\mathcal{S}) = \emptyset$. On dit dans ce cas que la droite $((\mathcal{D}))$ est **à l'extérieur** de la sphère $(\mathcal{S})$.
- Si $d = R$, alors $((\mathcal{D})) \cap (\mathcal{S}) = \{H\}$. On dit dans ce cas que la droite $((\mathcal{D}))$ est **tangente** à la sphère $(\mathcal{S})$ au point H.
- Si $d < R$, alors $((\mathcal{D})) \cap (\mathcal{S}) = \{A, B\}$. On dit dans ce cas que la droite $((\mathcal{D}))$ **perce** la sphère $(\mathcal{S})$ aux deux points A et B.

7- Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition

Soit $(\mathcal{S})(\Omega, R)$ une sphère et $((\mathcal{P}))$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $((\mathcal{P}))$ et $d = d(\Omega, ((\mathcal{P})))$.

- si $d > R$, alors $((\mathcal{P})) \cap (\mathcal{S}) = \emptyset$. On dit dans ce cas que le plan $((\mathcal{P}))$ est **à l'extérieur** de la sphère $(\mathcal{S})$.
- Si $d = R$, alors $((\mathcal{P})) \cap (\mathcal{S}) = \{H\}$. On dit dans ce cas que le plan $((\mathcal{P}))$ est **tangent** à la sphère $(\mathcal{S})$ au point H.
- Si $d < R$, alors $((\mathcal{P})) \cap (\mathcal{S}) = (\mathcal{C})$ où $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. On dit dans ce cas que le plan $((\mathcal{P}))$ **coupe la sphère** $(\mathcal{S})$ selon le cercle $(\mathcal{C})(H, \sqrt{R^2 - d^2})$.

Remarque

Le centre H du cercle $(\mathcal{C})$ est le point d'intersection de la droite (ΩH) et le plan $(\mathcal{P})$.

