

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Produit vectoriel dans l'espace

Table des matières

I	Orientation de l'espace	2
1	Trièdre	2
2	Repère orienté de l'espace	2
II	Produit vectoriel de deux vecteurs	3
1	Définition	3
2	Interprétation géométrique du produit vectoriel	4
III	Propriétés du produit vectoriel	4
1	Antisymétrie du produit vectoriel	4
2	Bilinéarité du produit vectoriel	5
3	Expression analytique du produit vectoriel	5
IV	Applications du produit vectoriel	5
1	Aire d'un triangle et d'un parallélogramme	5
2	Equation d'un plan défini par trois points de l'espace	5
3	Intersection de deux plans de l'espace	6
4	Distance d'un point à une droite	6

I – Orientation de l'espace

1. Trièdre

□ Définition

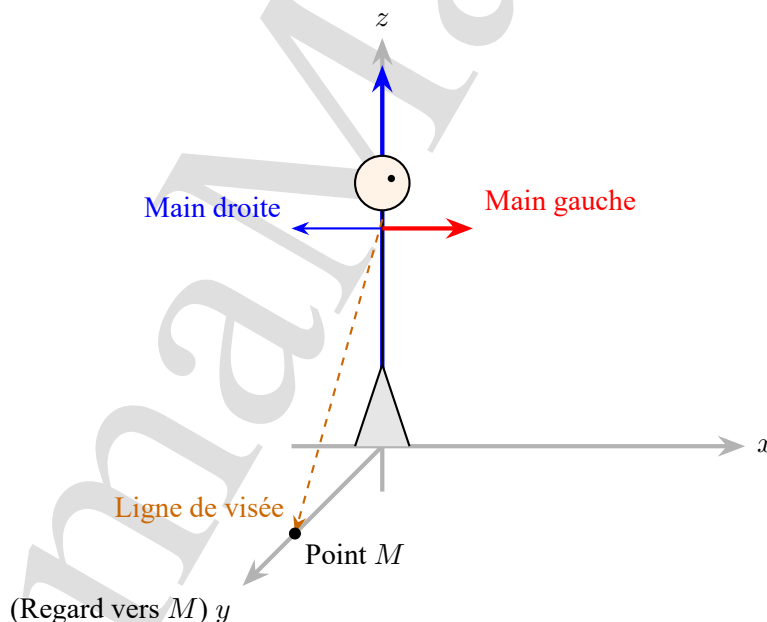
Un **trièdre** est une figure géométrique formée par trois demi-droites non coplanaires $[Ox); [Oy); [Oz)$ de même origine O . On le note (Ox, Oy, Oz) . Les demi-droites $[Ox); [Oy); [Oz)$ s'appellent les **arêtes** du trièdre (Ox, Oy, Oz) et les plans $xOy; yOz$ et zOx sont appelés les **faces** du trièdre.

2. Repère orienté de l'espace

□ Définition 1

Soient O, I, J et K quatre points non coplanaires de l'espace.

- Le **bonhomme d'ampère** lié au trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est un personnage imaginaire debout sur la demi-droite $[OK)$ en ayant les pieds à l'origine O et regarde vers le point I .
- Si le bonhomme d'ampère a le point J à sa droite, on dit que le trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est **indirect**.
- Si le bonhomme d'ampère a le point J à sa gauche, on dit que le trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est **direct**.



□ Définition 2

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On pose $\vec{OI} = \vec{i}; \vec{OJ} = \vec{j}; \vec{OK} = \vec{k}$.

- On dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **direct** si le trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est direct. Dans ce cas on dit aussi que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.
- On dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **indirect** si le trièdre $([OI), [OJ), [OK))$ est indirect. Dans

ce cas on dit aussi que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirecte.

- On dit que l'espace $\mathcal{E}$ est **orienté positivement** lorsqu'il est muni d'un repère direct.



Proposition

Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal direct, alors :

- Les repères $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont directs.
- Les repères $(O, \vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ et $(O, \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ sont indirects.
- Les repères $(O, -\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(O, \vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ sont indirects.



Remarque

Soit O un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$, alors : $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct $\Leftrightarrow$ la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.

II – Produit vectoriel de deux vecteurs

1. Définition



Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors **le produit vectoriel** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ défini par :
 - La droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB) .
 - Le trièdre $([OA], [OB], [OC])$ est direct.
 - $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times |\sin(\widehat{AOB})|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.



Remarque

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est indépendant du choix du point O .

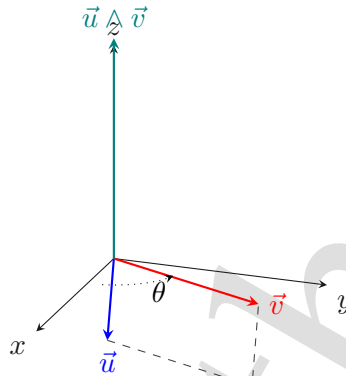


Proposition

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}_3$ on a : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$

- Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors : $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})|$
- Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors : la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe.
- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

2. Interprétation géométrique du produit vectoriel



Interprétation géométrique :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un **parallélogramme** dans un plan.
- Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur :
 - **perpendiculaire** au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (c'est pourquoi je l'ai tracé selon l'axe z dans la figure),
 - de **norme** égale à l'aire de ce parallélogramme :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

- dont le **sens** est donné par la règle de la main droite (ou règle du tire-bouchon) : si on tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, le pouce (ou le sens de progression du tire-bouchon) indique la direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

III – Propriétés du produit vectoriel

1. Antisymétrie du produit vectoriel



Proposition

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté et tout nombre réel α , on a : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.
On dit que le produit vectoriel est **antisymétrique**.

2. Bilinéarité du produit vectoriel

Proposition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté et α un nombre réel. Alors :

- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}.$
- $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}).$

3. Expression analytique du produit vectoriel

Proposition

L'espace $\mathcal{V}_3$ est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & x & x' \\ \vec{j} & y & y' \\ \vec{k} & z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

IV – Applications du produit vectoriel

1. Aire d'un triangle et d'un parallélogramme

Proposition

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$.
L'aire du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

2. Equation d'un plan défini par trois points de l'espace

Proposition

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$. On a :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

Remarque

Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Intersection de deux plans de l'espace



Proposition

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ dans l'espace orienté $\mathcal{E}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$. Alors :
 $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

4. Distance d'un point à une droite



Proposition

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$.
La distance d'un point M de l'espace à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M, (\mathcal{D})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

