



Barycentre dans le plan



1 Bac SECO

S. EL JAAFARI



Table des matières

I	Barycentre de deux points pondérés	2
1	Définition et vocabulaires	2
2	Propriétés	3
II	Barycentre de trois points pondérés	3
1	Définition et vocabulaires	3
2	Propriétés	4
III	Coordonnées du barycentre	4
1	Coordonnées du barycentre de deux points	4
2	Coordonnées du barycentre de trois points	5



I – Barycentre de deux points pondérés

1. Définition et vocabulaires

Définition 1

Soit A un point du plan et soit α un nombre réel.

- Le couple $(A; \alpha)$ est appelé **un point pondéré**.
- Le réel α s'appelle **le coefficient ou le poids ou la masse du point A** .
- On appelle **système de points pondérés** toute collection d'un nombre de points pondérés.

Exemple

- $(E; -2)$, $(B; 7)$, $(C; \frac{3}{4})$ sont des points pondérés.
- $\{(A; 4), (M; -1)\}$ est un système de points pondérés.

Définition (Théorème et définition)

- Pour tous les points pondérés $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$ il existe un unique point G du plan vérifiant : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
- Le point G ainsi défini s'appelle **le barycentre** du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

Exercice

Soient A , B et C trois points du plan tels que : $2 \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{AC} + 3 \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
Montrer que C est le barycentre des points A et B dont on déterminera les coefficients.

Remarque

Soient $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés.

- Si $\alpha + \beta = 0$, alors le système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ n'admet pas de barycentre.
- Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, alors $G = A$.
- Si $\beta \neq 0$ et $\alpha = 0$, alors $G = B$.
- Si $\alpha = \beta$, alors G est le milieu du segment $[AB]$.

2. Propriétés



Proposition : Propriété caractéristique du barycentre

Soient $(A; \alpha)$ et $(B; \beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le point G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ si, et seulement si pour tout point M du plan on a : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}$.



Remarque

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}.$$



Proposition (Homogénéité du barycentre)

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$, alors G est aussi le barycentre de tous les systèmes pondérés $\{(A; k\alpha), (B; k\beta)\}$ où $k \in \mathbb{R}$.

On dit que **le barycentre de deux points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre réel**.



Remarque

Si G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$, alors G est aussi le barycentre du système pondéré $\left\{ \left(A; \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right), \left(B; \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \right\}$.

II – Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et vocabulaires



Définition (Théorème et définition)

- Pour tous les points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, il existe un unique point G du plan vérifiant : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Le point G ainsi défini s'appelle **le barycentre** du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.



Remarque

Le barycentre d'un système de trois points qui ont le même coefficient non nul est appelé **un isobarycentre** ou **un centre de gravité**.

2. Propriétés



Proposition 1 : Propriété caractéristique du barycentre

Soient $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Un point G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$ si, et seulement si $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$ c'est-à-dire

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MC}.$$



Remarque

Si un point G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{BC} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{CB}$$



Proposition 2 : Homogénéité du barycentre

Si un point G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$, alors : G est aussi le barycentre du système pondéré $\{(A; k\alpha), (B; k\beta), (C; k\gamma)\}$ où $k \in \mathbb{R}$.

On dit que le **barycentre de trois points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre réel**.



Remarque

Si un point G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$, alors : G est aussi le barycentre du système pondéré $\left\{ \left(A; \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \right), \left(B; \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \right), \left(C; \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \right) \right\}$.



Proposition 3 : Associativité du barycentre

Soient $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$. Alors :

G est le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$ si, et seulement si G est le barycentre du système pondéré $\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\}$.

III – Coordonnées du barycentre

1. Coordonnées du barycentre de deux points



Proposition (Coordonnées du barycentre de deux points pondérés)

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ tel que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $G(x_G, y_G)$.

Alors :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

2. Coordonnées du barycentre de trois points



Proposition Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$ tel que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ et $G(x_G, y_G)$. Alors :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$