I – Généralités

1. Mode de génération d'une suite

1.1. suites définies par une expression explicite

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique où $I = [\![p;+\infty \quad (p\in\mathbb{N})$. La suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite « définie par une expression explicite » s'il existe une fonction f définie sur l'intervalle $[p;+\infty[$ telle que : $(\forall n\in I);u_n = f(n)$

Exemples

Les suites (u_n) définies par : $u_n = n^3 - n + 1$, $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$, $u_n = 3^{n+1}$, $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ …

1.2. Suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique où $I = \{n\in\mathbb{N} / n\geq p\}$ $(p\in\mathbb{N})$. La suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite récurrente si elle définie par la donnée de l'un de ses termes et une relation de récurrence donnant chacun de ses termes en fonction des termes qui le précédent

Exemples :

Les suites définies par : $(u_n)_{n\geq1} : \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5;\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$, $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n+1}{v_n+2};n\in\mathbb{N} \end{cases}$ et

$(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \ et\ w_1 = -1 \\ w_{n+2} = 2w_{n+1} + 3w_n;n\in\mathbb{N} \end{cases}$

2. Suites majorées – Suites minorées – Suites bornées

Définitions :

Soit $I = \{n\in\mathbb{N} / n\geq n_0\}$ où $n_0\in\mathbb{N}$ et une suite numérique $(u_n)_{n\in I}$.

- Dire que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée signifie que : $(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in I);u_n\leq M$. Le nombre réel M est appelé « un majorant de la suite $(u_n)_{n\in I}$ »
- Dire que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée signifie que : $(\exists m\in\mathbb{R})(\forall n\in I);u_n\geq m$. Le nombre réel m est appelé « un minorant de la suite $(u_n)_{n\in I}$ »
- Dire que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée signifie que : $\left[\exists(m;M)\in\mathbb{R}^2\right](\forall n\in I);m\leq u_n\leq M$

Remarques :

1/ Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite telle que : $(\forall n\in I);u_n = f(n)$. Pour montrer que $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par M sur (respectivement minorée par m sur I) il suffit de montrer que la fonction f est majorée par M sur un intervalle contenant I (respectivement minorée par m)

2/ Soit $(u_n)_{n\in I}$ telle que : $(\forall n\in I);u_{n+1} = f(u_n)$. Pour montrer que $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par M sur I (respectivement minorée par m sur I), en général on raisonne par récurrence

Exemples :

1/ Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});2 < u_n\leq 3$

Soit f la fonction associée à la suite (u_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et et on a : $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $(\forall x\in\mathbb{R}^+);f'(x)<0$. Donc f est strictement Décroissante sur $\mathbb{R}^+$ D'où $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<f(x)\le f(0)$ et par suite $2<f(x)\le 3$. Par conséquent $(\forall n\in\mathbb{N});2<u_n\le 3$.

2/ Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\dfrac{1}{2}v_n-1;n\in\mathbb{N}\end{cases}$. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});-2<v_n\le 1$.

On raisonne par récurrence. Soit P_n : "$-2<v_n\le 1;n\in\mathbb{N}$"

- Pour $n=0;v_0=1$ *donc* $-2<v_0\le 1$.*d'où* P_0 *est vraie*
- Soit n un entier naturel fixé, supposons que P_n *est vraie* $-2<v_n\le 1$ soit et montrons que P_{n+1} est vraie soit $-2<v_{n+1}\le 1$.

On a $-2<v_n\le 1\Rightarrow -1<\dfrac{1}{2}v_n\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2<\dfrac{1}{2}v_n-1\le-\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2<v_{n+1}\le-\dfrac{1}{2}\le 1$. Donc P_{n+1} est vraie

- Donc . $(\forall n\in\mathbb{N});-2<v_n\le 1$.

Théorème :

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée $\Leftrightarrow(\exists M>0)(\forall n\in I);|u_n|\le M$

3. Monotonie d'une suite numérique

Définition :

- Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si, et seulement si, $(\forall(n;m)\in I^2);n\le m\Rightarrow u_n\le u_m$
- Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si, et seulement si, $(\forall(n;m)\in I^2);n\le m\Rightarrow u_n\ge u_m$
- Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ est strictement croissante si, et seulement si, $(\forall(n;m)\in I^2);n<m\Rightarrow u_n<u_m$
- Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ est strictement décroissante si, et seulement si, $(\forall(n;m)\in I^2);n<m\Rightarrow u_n>u_m$
- Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante si, et seulement si, $(\forall(n;m)\in I^2);u_n=u_m$

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique où $I=\{n\in\mathbb{N}/n\ge p\}$ et p un entier naturel connu.

- $(u_n)_{n\in I}$ est croissante $\Leftrightarrow(\forall n\in I);u_{n+1}-u_n\ge 0$
- $(u_n)_{n\in I}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow(\forall n\in I);u_{n+1}-u_n>0$
- $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante $\Leftrightarrow(\forall n\in I);u_{n+1}-u_n\le 0$
- $(u_n)_{n\in I}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow(\forall n\in I);u_{n+1}-u_n<0$
- $(u_n)_{n\in I}$ est constante $\Leftrightarrow(\forall n\in I);u_{n+1}-u_n=0$

Remarque :

1/ Si $(u_n)_{n\in I}$ *est définie par :* $(\forall n\in I);u_n=f(n)$ *alors la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in I}$ *est la même que celle de la fonction* f *sur l'intervalle* $[p;+\infty[$

2/ Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite récurrente telle que $(\forall n\in I);u_{n+1}=f(u_n)$ alors les monotonies de la suite $(u_n)_{n\in I}$ et de la fonction sont , en général, indépendantes

<u>Exemples</u> :

1/ Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définiepar : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\frac{1}{n}$. La fonction associée à cette suite est f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ qui est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

2/ Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n-1;n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});-2<v_n\leq 1$

b/ Etudier les variations de la suite (v_n)

<u>Réponse</u> : En effet pour la question a/ on l'a déjà résolu précédemment.

b/ Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}v_n--1-v_n=-\frac{1}{2}(v_n+2)$ .Comme on $v_n+2>0$ *et* $-\frac{1}{2}<0$ *alors* $v_{n+1}-v_n<0$. Alors la suite (v_n) est strictement décroissante

II- Suites particulières

1. Suites arithmétiques

<u>Définition</u> :

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique si, et seulement si, il existe un réel r tel que $u_{n+1}-u_n=r$ pour tout entier naturel $n\geq p$. Autrement dit :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique $\Leftrightarrow$ $(\exists r\in\mathbb{R}^*)(\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0);u_{n+1}-u_n=r$

La constante r est appelée « la raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq n_0}$ »

<u>Théorème</u> :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r et p un entier naturel tel que $p\geq n_0$. Alors :

★ $(\forall n\in\mathbb{N},n\geq n_0);u_n=u_p+(n-p)\times r$

★ $\sum_{k=p}^{n}u_k=(n-p+1)\times\frac{u_p+u_n}{2}$

<u>Corollaire 1</u>

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Alors :

* $(\forall n\in\mathbb{N});u_n=u_0+nr$
* $(\forall n\in\mathbb{N});\sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$

<u>Corollaire 2</u>

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

<u>Propriété</u> :(caractérisation d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique $\Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0);u_{n+1}=\dfrac{u_n+u_{n+2}}{2}$

Conséquence

Soit a, b et c trois nombres réels.

a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique $\Leftrightarrow b=\dfrac{a+c}{2}$

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow r>0$
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow r<0$
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante $\Leftrightarrow r=0$

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2};n\in\mathbb{N}\end{cases}$ et la suite (v_n) définie par :

$(\forall n\in\mathbb{N});v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on déterminera la raison

2/ Exprimer v_n en fonction de n

3/ Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n

4/ Calculer, en fonction de n, la somme $S_n=\sum_{k=2}^{n}v_k$

2. Suites géométriques

Définition

Une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique si, et seulement si, il existe un réel non nul q tel que $v_{n+1}=q\times v_n$ pour tout entier naturel $n\geq n_0$. Autrement dit :

$(v_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique $\Leftrightarrow \left(\exists q\in\mathbb{R}^*\right)(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0);v_{n+1}=q\times v_n$.

Le nombre réel q est appelé « la raison de la suite géométrique $(v_n)_{n\geq n_0}$ »

Théorème

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q et soit p un entier naturel tel que $p\geq n_0$. Alors :

- $(\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0);\ v_n=v_p\times q^{n-p}$

- $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0);\begin{cases} \sum_{k=p}^{n} v_k = v_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & ;si\ q \neq 1 \\ \sum_{k=p}^{n} v_k = (n+1)v_p & ;si\ q = 1 \end{cases}$

Corollaire

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme v_0. Alors :

- $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 \times q^n$
- $(\forall n \in \mathbb{N}); \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Corollaire

$(\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\})(\forall n \in \mathbb{N}); 1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété : (caractéristique d'une suite géométrique)

Soit $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

$(v_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0); (v_{n+1})^2 = v_n \times v_{n+2}$

Conséquence

Soit a , b et c trois nombres réels.

a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes d'une progression géométrique $\Leftrightarrow b^2 = a \times c$

Théorème

Soit $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme v_{n_0} . Alors :

q	$q<0$	$0<q<1$		$q=1$	$q>1$	
Signe de v_{n_0}	-	$v_{n_0}>0$	$v_{n_0}<0$	-	$v_{n_0}>0$	$v_{n_0}<0$
Monotonie de $(v_n)_{n \geq n_0}$	Ni croissante Ni décroissante	décroissante	croissante	constante	croissante	décroissante

Exemple :

Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ $et\ (w_n)_{n \geq 1}\ les\ suite\ définie\ par : \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n+2}{v_n+4} ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ $et\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n + 2}$

1/ Montrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2/ Exprimer w_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3/ Exprimer v_n en fonction de w_n , puis exprimer v_n en fonction de n.

4/ Calculer en fonction de n, la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} w_k$.

3. Suites arithmético-géométriques

Définition

Dire qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

u_{n_0} est connu et ses termes vérifient la relation de récurrence : $(\forall n\geq n_0)$; $u_{n+1}=au_n+b$

Remarques :

1/ Si $a=1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison $r=b$

2/ Si $b=0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q=a$

3/ Si $a=0$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite constante

Proposition

Soit $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et soit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par u_{n_0} et $(\forall n\geq n_0);u_{n+1}=au_n+b$.

Alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par : $(\forall n\geq n_0);v_n=u_n+\dfrac{b}{a-1}$ est une suite géométrique de raison a

Exemple :

On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $\begin{cases} u_0=13 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5};n\in\mathbb{N}\end{cases}$ et $(\forall n\in\mathbb{N});v_n=u_n-1$

1/ Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

2/ exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3/ Calculer, en fonction de n, les sommes $S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ et $T_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

4. Suites définies par la relation $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ (hors programme)

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite définie par la donnée de u_{n_0} et u_{n_0+1} et la relation $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ où $(a;b)\in\mathbb{R}^{*2}$. L'équation $q^2-aq-b=0$ est appelée « l'équation caractéristique de cette suite », on note Δ son discriminant. Alors :

1/ Si $\Delta>0$ et q_1 et q_2 les solutions de l'équation caracristique, on a :

$(\forall n\geq n_0);u_n=\alpha q_1^{\,n}+\beta q_2^{\,n}$ où α et β sont déterminés par les conditions initiales.

2/ Si $\Delta=0$ et la solution double de l'équation caractéristique, on a :

$(\forall n\geq n_0);u_n=(\alpha+\beta n)q_0^{\,n}$ où α et β sont déterminés par les conditions initiales.

3/ Si Si $\Delta<0$, $q=re^{i\theta}$ et $\overline{q}=re^{-i\theta}$ les solutions complexes de l'équation caractéstique où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on a : $(\forall n\geq n_0);u_n=r^n(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta))$ où α et β sont déterminés par les conditions initiales

Exemple :

Déterminer le terme général de la suite (u_n) *définie par* : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = -\frac{3}{2}u_{n+1} + u_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

III- Limite d'une suite numérique

1. Convergence d'une suite

Définitions

Soit (u_n) une suite numérique et $L \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N); |u_n - L| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N); u_n > A$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N); u_n < -A$

Théorème

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - L) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$ .Mais la réciproque n'est pas vraies en général.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- Dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente signifie qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$
- Dire que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est divergente signifie qu'elle n'est pas convergente.

  Autrement dit si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ oubien sa limite n'existe pas

Exemples :

1/ La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = 1 + \frac{3}{n}$, est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2/ La suite (v_n) *défine par* : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{3n^2 + n + 2}{2n - 3}$, est divegente car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3/ La suite (w_n) *définie par* : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_n = 2\cos(n+3)$, est divergente car sa limite n'éxiste pas

2. Convergence et opérations sur les suites

2.1. Limite d'une somme de deux suites

Théorème

Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites numériques. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

2.2. Limite du produit de deux suites

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_1}$ deux suites numériques. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$ ou $+\infty$		$L<0$ ou $-\infty$		0
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

2.3. Limite de l'inverse d'une suite

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$L\neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right)$	$\dfrac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

2.4. Limite du quotient de deux suites

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$ ou $+\infty$		$L<0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$L'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarque :

Lorsqu'on a l'une des formes indéterminées, pour calculer cette limite, il faut lever l'indétermination en utilisant l'une des méthodes adéquates.

3. Techniques de convergence d'une suite

3.1. Limites et ordre

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques

- $\begin{cases} * \ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ convergente} \\ * \ (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N);\ u_n>0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$

- $\begin{cases} * \left(u_n\right)_{n\geq n_0} \text{ convergente} \\ * \left(v_n\right)_{n\geq n_1} \text{ convergente} \\ (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);u_n<v_n \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3.2. Critères de convergence

Théorème de comparaison

Soit $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}, \left(v_n\right)_{n\geq n_1}$ et $\left(w_n\right)_{n\geq n_2}$ trois suites numériques et $L\in\mathbb{R}$

- $\begin{cases} * (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);u_n>v_n \\ * \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- $\begin{cases} \bullet (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);u_n<v_n \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$
- $\begin{cases} \bullet\bullet (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);|u_n-L|<w_n \\ \bullet\bullet \lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$
- $\begin{cases} ** (\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N);w_n<u_n<v_n \\ ** \lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ $(\textit{théorème des gendarmes})$

Exemples :

Calculer les limites des suites suivantes :

1/ $\left(u_n\right): (\forall n\in\mathbb{N}); u_n=-n^2+sin(n+1)$.

2/ $\left(v_n\right)_{n\geq 1}: \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); v_n=\dfrac{1+2\cos\left(n^2+n+1\right)}{n}$.

3/ $\left(w_n\right)_{n\geq 1}: \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); w_n=n+(-1)^n$

4/ $\left(a_n\right)_{n\geq 1}: \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. 5/ $\left(b_n\right)_{n\geq 1}: \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right); b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$

3.3. Convergence des suites monotones

Théorème

- ✓ Si une suite est **croissante et majorée**, alors elle est **convergente**
- ✓ Si une suite est **décroissante et minorée**, alors elle est **convergente**

Remarque et conséquences

1/ Le théorème précédent affirme l'éxistance de la limite, mais ne donne pas la valeur de la limite

2/ Si une suite $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ est croissante et majorée par le nombre M, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\leq M$

3/ Si une suite $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ est décroissante et minorée par m, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\geq m$

4/ Si une suite est croissante, alors elle est :

- soit majorée et convergente
- soit non majorée et divergente vers $+\infty$

5/ Si une suite est décroissante, alors elle est :

* soit minorée et convergente
* soit non minorée et divergente vers $-\infty$

Corollaire

- Toute suite **décroissante et positive** est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$
- Toute suite **croissante et négative** est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$

3.4. Limite d'une suite géométrique

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_{n_0} \neq 0$. Alors :

Valeurs de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	N'éxiste pas	0	1	$+\infty$	
Signe de u_{n_0}	-	-	-	$u_{n_0} > 0$	$u_{n_0} < 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	N'éxiste pas	0	u_{n_0}	$+\infty$	$-\infty$

3.5. Limite d'une suite de la forme $v_n = f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$. On considère la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par : $(\forall n \geq n_0); v_n = f(u_n)$.

Si $\begin{cases} * \ (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N); u_n \in I \\ * \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ * \ f \text{ est continue en } L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(L)$

3.6. Limite d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $\begin{cases} \bullet \ f \text{ est continue sur } I \\ \bullet \ f(I) \subset I \\ \bullet \ u_{n_0} \in I \\ \bullet \ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ est convergente} \end{cases}$ alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$

IV- Les suites adjacentes

Définition

Dire que deux suites numériques suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont adjacentes signifie que :

$$\begin{cases} \bullet\ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ est croissante et } (v_n)_{n\geq n_0} \text{ est décroissante} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème

Si $\begin{cases} \bullet\ (u_n)_{n\geq n_0}\ et\ (v_n)_{n\geq n_0} \text{ sont adjacentes} \\ \bullet\ (u_n)_{n\geq n_0} \text{ est croissante et } (v_n)_{n\geq n_0} \text{ est décroissante} \end{cases}$, alors $\begin{cases} * \text{ elles sont convergentes} \\ * \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L \\ * (\forall n \geq n_0); u_n \leq v_n \end{cases}$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.