

TRONC COMMUN SCIENTIFIQUE



Calcul vectoriel dans le plan



Auteur : S. El jaafari

Table des matières

I Vecteurs dans le plan	2
1 Éléments d'un vecteur	2
2 Égalité de deux vecteurs	2
3 Somme de deux vecteurs	3
II Multiplication d'un vecteur par un réel	4
III Colinéarité de deux vecteurs - Alignement de trois points	5
IV Milieu d'un segment	5

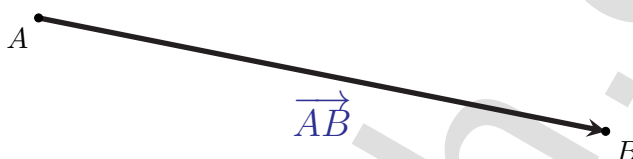
I – Vecteurs dans le plan

1. Éléments d'un vecteur

□ Définition

Soit A et B deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- **Sa direction** : la droite (AB)
- **Son sens** : de A vers B
- **Sa norme** : la distance entre A et B qu'on note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$



💡 Remarque

- Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est le vecteur dont la norme est nulle.
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ équivaut à $A = B$.
- On a : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$.

2. Égalité de deux vecteurs

□ Définition 1

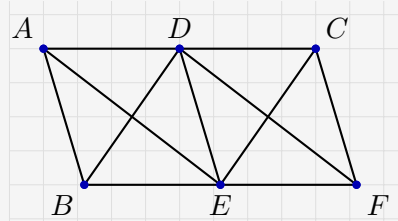
On dit que **deux vecteurs sont égaux** si, et seulement si, ils ont **la même direction, le même sens et la même norme**.

□ Exemple

On considère la figure ci-contre. Recopier et compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \quad = \quad ; \quad \overrightarrow{AD} = \quad = \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = \quad ;$$

$$\overrightarrow{BD} = \quad$$



□ Définition 2

Deux vecteurs sont dits **opposés** si, et seulement si :

- Ils ont la même direction.
- Ils ont la même norme.
- Ils ont des sens opposés.

En plus si A et B sont deux points du plan, le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, et on a :

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$



Proposition 1 : Règle du parallélogramme

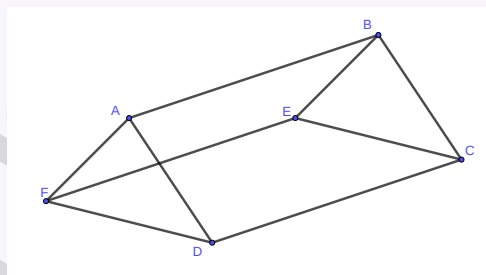
Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux du plan. Alors :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ou que les points A, B, C et D sont alignés.



Exercice

Sachant que les quadrilatères $ABCD$ et $ABFE$ sont des parallélogrammes. Montrer que $EFCD$ est aussi un parallélogramme.



Proposition 2

Pour chaque vecteur $\vec{u}$ et chaque point A du plan, il existe un unique point M du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.

3. Somme de deux vecteurs



Proposition 1 : Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

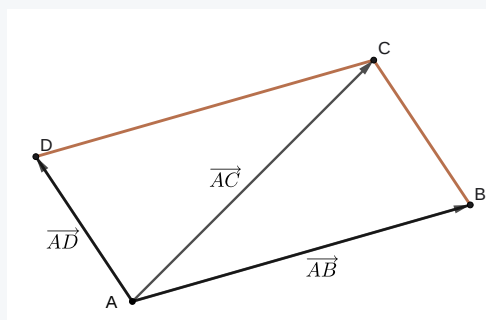
Cette relation s'appelle **La relation de Chasles**.



Proposition 2

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Alors :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.



**Proposition 3 : Propriétés de l'addition des vecteurs**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A et B deux points du plan. Alors :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. (l'addition des vecteurs est commutative)
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$. (L'addition des vecteurs est associative)
- $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

**Exercice**

1/ Simplifier les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$.

2/ Soit MAT un triangle. Construire le point H tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MH}$.

II – Multiplication d'un vecteur par un réel

**Définition**

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ et du réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini par :

- Si $k > 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction et le même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction et des sens opposés et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.

**Remarque**

$$0\vec{u} = \vec{0}$$

$$* \quad k\vec{0} = \vec{0}$$

$$* \quad 1\vec{u} = \vec{u}$$

$$* \quad (-1)\vec{u} = -\vec{u}$$

**Proposition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α et β deux nombres réels. Alors :

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.
- $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $(\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$.

**Exercice**

1/ Soient A et B deux points distincts du plan. Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}.$$

2/ Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O . On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

a) Montrer que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire l'expression de $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.

III – Colinéarité de deux vecteurs - Alignement de trois points

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$.

Proposition

- Trois points A , B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I et J deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{AD}$.

1/ Faire une figure convenable.

2/ Montrer que : $\overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

3/ En déduire que les points C , I et J sont alignés.

IV – Milieu d'un segment

Proposition 1

Soient A et B deux points du plan. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- Le point I est milieu du segment $[AB]$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

**Proposition 2 : Propriété caractéristique du milieu d'un segment**

I est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

**Proposition 3**

Soit ABC un triangle tel que I est le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$. Alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

**Exercice**

Soit ABC un triangle et I et J deux points du plan tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$.
Montrer que A est le milieu du segment $[CJ]$.

