



Série 1

Vecteurs de l'espace



1 BAC SCEX

S. EL JAAFARI

Exercice 1

ABCDEFGH est un cube de centre O .

1. Montrer que les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{EG}$ et $\vec{BF}$ sont coplanaires.
2. Montrer que $\vec{OA}$, $\vec{EG}$ et $\vec{BC}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 2

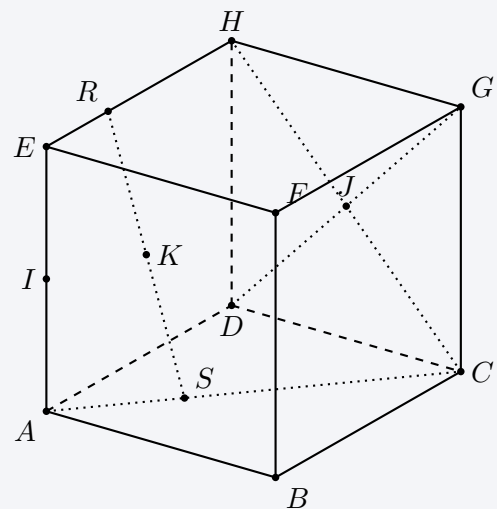
ABCDEFGH est un parallélépipède droit.
On a placé les points I , J , K , R et S tels que :

- I milieu de $[AE]$;
- J centre de la face $CDHG$;
- R vérifie $\vec{ER} = \frac{1}{3}\vec{EH}$;
- S vérifie $\vec{AS} = \frac{1}{3}\vec{AC}$;
- K milieu de $[RS]$.

- 1/
 - a) Justifier que (ABD) est un plan.
 - b) Exprimer le vecteur $\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
 - c) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (ABD) .
- 2/
 - a) Exprimer le vecteur $\vec{AI}$ en fonction du vecteur $\vec{AE}$.
 - b) Exprimer le vecteur $\vec{AK}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
 - c) En déduire l'expression du vecteur $\vec{IK}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

3/

- a) En utilisant les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$, démontrer que les points I , J et K sont alignés.
- b) En déduire que les points I , J , K , R et S sont coplanaires.

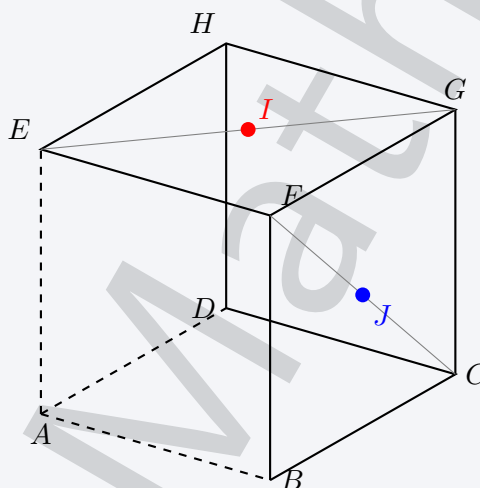


 Exercice 3

On considère un cube $ABCDEFGH$.

On note I le milieu du segment $[EG]$ et J le milieu du segment $[FC]$.

- 1/
 - a) Rappeler la définition de trois vecteurs coplanaires de l'espace.
 - b) Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.
 - c) Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
 - d) On pose $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ sont coplanaires.
- 2/
 - a) Rappeler la définition de quatre points coplanaires.
 - b) Montrer que les points A , B , C et D sont coplanaires.
 - c) Montrer que les points A , B , G et H sont coplanaires (on pourra exprimer $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AG}$, ou utiliser une autre décomposition judicieuse).
 - d) Les points A , B , C et G sont-ils coplanaires ? Justifier rigoureusement votre réponse en utilisant une décomposition dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



 Exercice 4

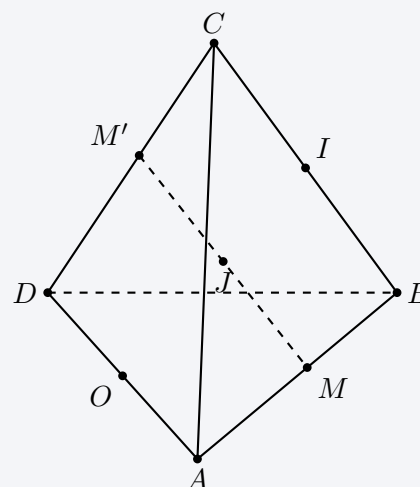
On considère deux droites non coplanaires (AB) et (CD) de l'espace.

À tout nombre réel t , on associe deux points M et M' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DM'} = t \overrightarrow{DC}.$$

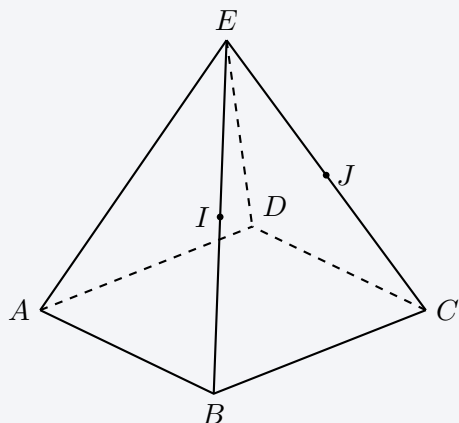
Soient O , I , J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$ et $[MM']$.

1.
 - (a) Montrer que $\overrightarrow{OJ} = \frac{t}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 - (b) En déduire que $\overrightarrow{OJ} = t \overrightarrow{OI}$.
2. Déterminer l'ensemble (E) des points J de l'espace lorsque t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$.



 Exercice 5

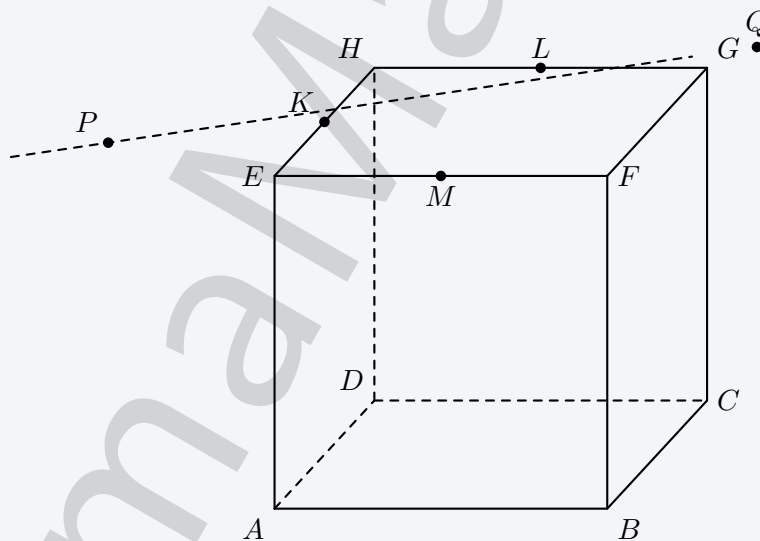
La figure ci-dessous représente la pyramide $ABCDE$ à base carrée ; les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[CE]$.



- 1/ Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.
- 2/
 - a) Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.
 - b) On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.
- 3/ En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE) .

 Exercice 6

On considère le cube $ABCDEFGH$. Les points K, L, M sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[HG]$, $[EF]$.



Les points P et Q représentent l'intersection de la droite (KL) respectivement avec les plans (ABF) et (CBF) .

- 1/
 - a) Justifier que le point P est l'intersection des droites (EF) et (KL) .
 - b) En déduire que le point K est le milieu du segment $[PL]$.

On admet que par un raisonnement similaire, le point L est le milieu du segment $[KQ]$:

- 2/ Justifier l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

 Exercice 7

Soit un tétraèdre $ABCD$ et les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

- 1/ Démontrer que A , E et F ne sont pas alignés.
- 2/ Démontrer que les plans (BCD) et (AEF) sont parallèles.

 Exercice 8

On considère la pyramide $SABCD$ ci-dessous. Compléter la figure au fur et à mesure.

1. Déterminer le point d'intersection U de la droite (NP) et du plan (ABC) .
2. Déterminer le point d'intersection V de la droite (MN) et du plan (ABC) .
3. En déduire l'intersection des plans (MNP) et (ABC) .
4. Déterminer le point d'intersection W de la droite (DC) et du plan (MNP) .
5. En déduire l'intersection du plan (MNP) et de la face (SDC) .
6. Déterminer la section de la pyramide $SABCD$ par le plan (MNP) .

