



Série 1

Étude analytique de l'espace

1 BAC SM

S. EL JAAFARI



L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Exercice 1

On considère les points $A(2, 1, 1)$; $B(5, 3, 1)$; $C(-1, -2, 1)$; $D(-2, 3, 1)$.

- 1/ Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$.
- 2/ Déterminer les coordonnées du point H tel que $ABCH$ soit un parallélogramme.
- 3/ Déterminer les coordonnées des points I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
- 4/
 - a) Les points A, B, D sont-ils alignés?
 - b) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires?



Exercice 2

- 1/ Étudier la colinéarité des vecteurs suivants, en utilisant la méthode du calcul vectoriel puis celle des déterminants :
 - a) $\vec{u}(2, -2, 3)$; $\vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - \frac{9}{4}\vec{k}$.
 - b) $\vec{u}(4, 4, 5)$; $\vec{v}\left(1, 1, \frac{4}{5}\right)$.
 - c) $\vec{u} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$.
- 2/ Étudier l'alignement des points A, B et C dans chacun des cas suivants :
 - a) $A(1, 1, 4), B(0, 1, 1)$ et $C(6, -2, 5)$.
 - b) $A(2, -1, -3), B(0, 4, -4)$ et $C(-2, -1, 1)$.
 - c) $A(-1, 6, 4), B(-1, 3, 5)$ et $C(1, 9, 3)$.
- 3/ Étudier le parallélisme des droites (AB) et (EF) dans chacun des cas suivants :
 - a) $A(2, 2, -1), B(7, -1, 1), E(5, 6, 1)$ et $F(10, 3, 3)$.
 - b) $A(2, -1, 3), B(1, 2, 4), E(-1, 4, 2)$ et $F(2, -5, -1)$.
 - c) $A(1, -1, 2), B(1, 3, -1), E(-1, -2, 1)$ et $F(3, -2, 4)$.

**Exercice 3**

1/ Calculer le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans chacun des cas suivants et en déduire leur coplanarité de ces vecteurs.

- a) $\vec{u}(2, -4, 0)$, $\vec{v}(-1, 1, 3)$ et $\vec{w}(-4, 5, 9)$.
- b) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.
- c) $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ et $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

2/ Étudier la coplanarité des points A, B, C, D dans chacun des cas suivants :

- a) $A(3, 2, 0)$, $B(2, 3, 1)$, $C(4, -1, 2)$ et $D(3, 5, -1)$.
- b) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(1, 3, -1)$ et $D(2, 4, -1)$.
- c) $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 3)$, $C(2, -1, 3)$ et $D(-1, 3, 1)$.

**Exercice 4**

1/ Déterminer une représentation paramétrique puis les équations cartésiennes de la droite (D) passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

- a) $A(-2, 1, 4)$ et $\vec{u}(3, -2, 2)$.
- b) $A(1, 0, -2)$ et $\vec{u}(1, 5, -2)$.
- c) $A(4, -2, 0)$ et $\vec{u}(-2, 3, 0)$.

2/ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) et ses équations cartésiennes dans chacun des cas suivants :

- a) $A(2, 1, -1)$ et $B(0, -3, 3)$.
- b) $A(-6, 0, 1)$ et $B(2, 3, -5)$.
- c) $A(0, 1, -3)$ et $B(7, 2, 0)$.

**Exercice 5**

1/ Déterminer une représentation paramétrique puis une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A et dirigée par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

- a) $A(1, 1, 4)$ et $\vec{u}(3, -2, 2)$ et $\vec{v}(0, -1, 1)$.
- b) $A(1, 0, -2)$ et $\vec{u}(1, 5, -2)$ et $\vec{v}(4, 0, 1)$.
- c) $A(4, -2, 0)$ et $\vec{u}(-2, 3, 0)$ et $\vec{v}(1, 1, 1)$.

2/ Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan (ABC) , dans chacun des cas suivants :

- a) $A(2, 1, -1)$, $B(0, -3, 3)$ et $C(2, 1, 4)$.
- b) $A(-6, 0, 1)$, $B(2, 3, -5)$ et $C(-7, 2, 1)$.
- c) $A(0, 1, -3)$, $B(7, 2, 0)$ et $C(3, -1, -2)$.

**Exercice 6**

Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$ dont chacun des cas suivants :

- $(\mathcal{P}) : 2x + y - 3z + 5 = 0$ $(\mathcal{P}) : x + 2y + 3z - 7 = 0.$
- $(\mathcal{P}) : y - 3z + 5 = 0$ $(\mathcal{P}) : x + y + z - 3 = 0.$
- $(\mathcal{P}) : 3x + 2y - 3z + 1 = 0$ $(\mathcal{P}) : -x + 5y + 3z - 2 = 0.$

**Exercice 7**

Étudier la position relative des deux droites (D) et (D') dans chacun des cas suivants :

- a) $(D) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $(D') : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 - 4k \\ z = 2 + 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$.
- b) $(D) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $(D') : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 5 - 6k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$.
- c) $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 31 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $(D') : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = k \\ z = 2 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$.

**Exercice 8**

Étudier la position relative de la droite (D) et du plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas suivants :

- a) $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $(\mathcal{P}) : x + y + z + 3 = 0.$
- b) $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $(\mathcal{P}) : 2x - 3y + z - 1 = 0.$
- c) $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; $(\mathcal{P}) : 3x + 2y - z + 4 = 0.$

**Exercice 9**

Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont ils parallèles dans chacun des cas suivants :

- a) $(\mathcal{P}) : 2x - y + 2z + 2 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : 6x - 3y + 6z - 1 = 0.$
- b) $(\mathcal{P}) : x + y - 2z + 2 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : 3x - y + 6z + 5 = 0.$

c) $(\mathcal{P}) : 2x + 3y - 5z + 11 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : -4x - 6y + 10z - 1 = 0$.

d) $(\mathcal{P}) : x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : \sqrt{3}x - 3y + z + 5 = 0$.

**Exercice 10**

Soient $A(-1, -3, -2)$, $B(0, 4, 2)$ et $C(2, 2, -1)$ trois points de l'espace.

- 1/ Vérifier que (ABC) est un plan.
- 2/ Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC) .
- 3/ Vérifier que le point $E(-3, -1, 1)$ appartient au plan (ABC) .
- 4/ Vérifier que le point $D(1, 1, 1)$ n'appartient pas au plan (ABC) .
- 5/ Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 6/ Soit (D) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1, 3)$. Etudier la position relative de la droite (D) et le plan (ABC) .