

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

VECTEURS DANS L'ESPACE

1 BAC SCEX

S. EL JAAFARI

Table des matières

I	Notion de vecteur dans l'espace	2
1	Définition	2
2	Égalité de deux vecteurs - Opposé d'un vecteur	2
II	Opérations sur les vecteurs dans l'espace	3
1	Addition des vecteurs	3
2	Multiplication d'un vecteur par un réel	4
III	Vecteurs colinéaires dans l'espace	5
1	Définition	5
2	Droite dans l'espace	6
3	Caractérisation vectorielle d'une droite	7
IV	Vecteurs coplanaires dans l'espace	7
1	Définition	7
2	Plan dans l'espace	8
V	Parallélisme dans l'espace	9
1	Parallélisme de deux droites dans l'espace	9
2	Parallélisme d'une droite et d'un plan dans l'espace	9
3	Parallélisme de deux plans dans l'espace	9

I – Notion de vecteur dans l'espace

1. Définition

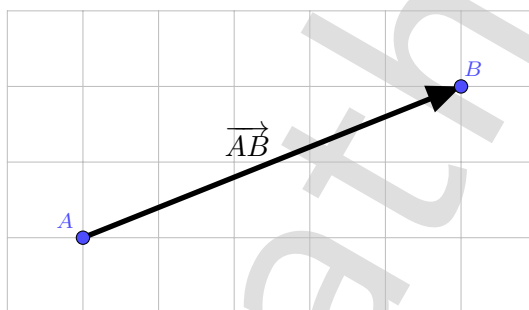
□ Définition

Soient A et B deux points de l'espace.

1) Si $A \neq B$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :

- Sa direction est celle de la droite (AB) .
- Son sens de A vers B.
- Sa norme, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB , et on écrit $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

2) Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$ et on a : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$



💡 Remarque

Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

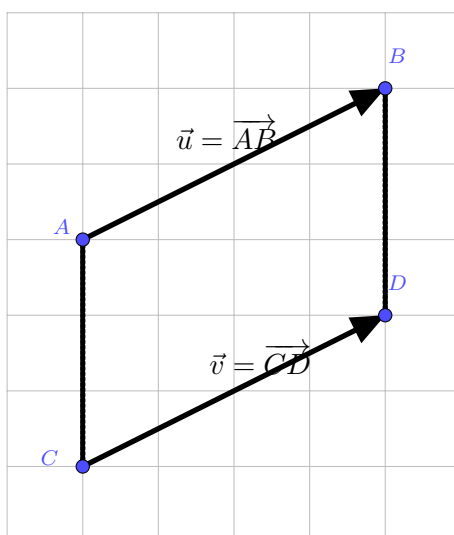
- le point A est l'origine.
- le point B est l'extrémité.

2. Égalité de deux vecteurs - Opposé d'un vecteur

□ Définition

Les deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Autrement dit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} (AB) \parallel (CD) \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ ont le même sens} \\ \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| \end{cases}$

**Proposition 1**

Soient A, B, C et D des points de l'espace tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \text{le quadrilatère ABDC est un parallélogramme}$$
**Proposition 2**

Soit O un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur. Alors il existe un unique point M de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

**Remarque**

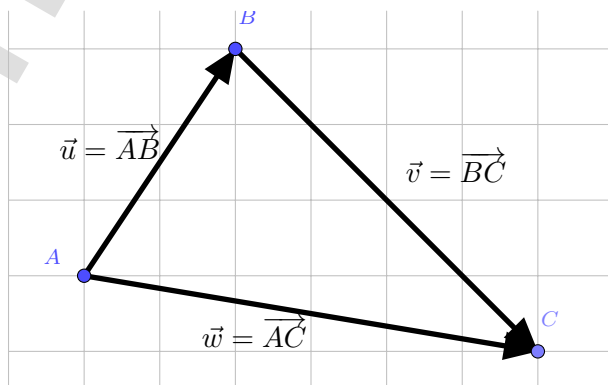
Soient A, B et C trois points de l'espace. Alors il existe un unique point M de l'espace tel que ABMC soit un parallélogramme.

II – Opérations sur les vecteurs dans l'espace

1. Addition des vecteurs

**Définition**

Soient A, B et C trois points de l'espace. On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ et on écrit $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

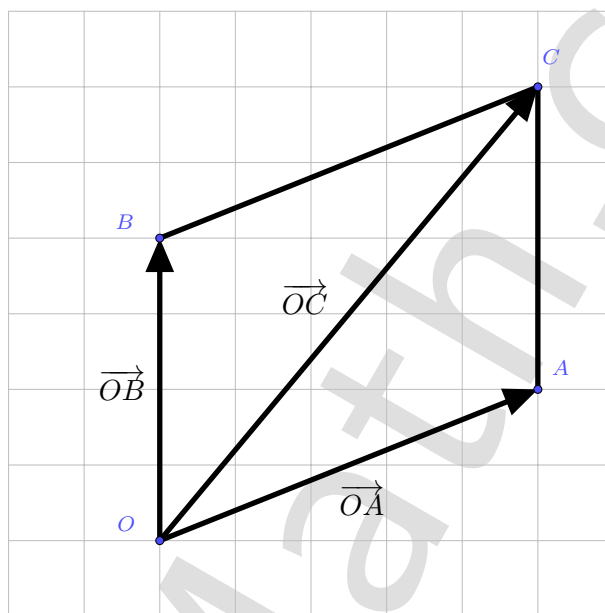


**Proposition 1 : Relation de Chasles**

Pour tous les points P, M et Q de l'espace, on a : $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ}$.

**Proposition 2 : Règle du parallélogramme**

Le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme si, et seulement si $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

**Proposition 3 : Propriétés de l'addition des vecteurs dans l'espace**

Pour tous les vecteurs de l'espace ; $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

2. Multiplication d'un vecteur par un réel

**Définition**

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ qui vérifie les conditions suivantes :

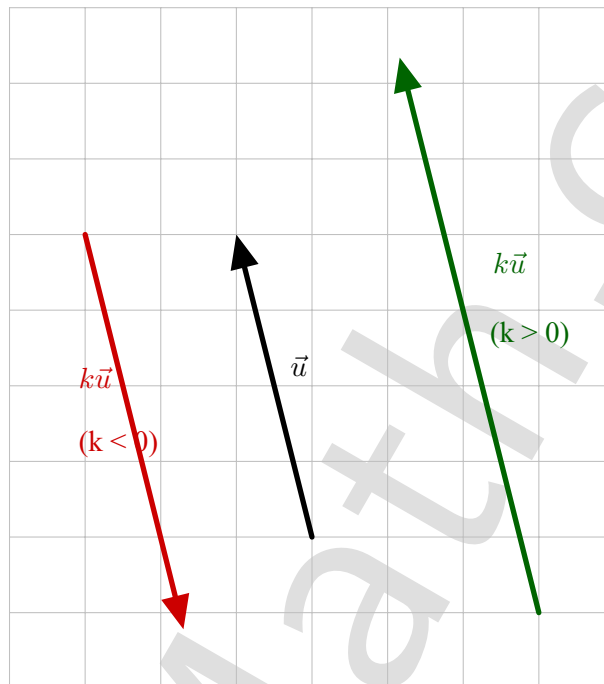
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens si $k > 0$, et ils sont de sens opposés si $k < 0$.
- $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.



Remarque

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k , on a :

- $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.



Proposition

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et pour tous réels α et β , on a :

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha \times \beta)\vec{u}$.
- $\alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -(\alpha \times \beta)\vec{u}$.

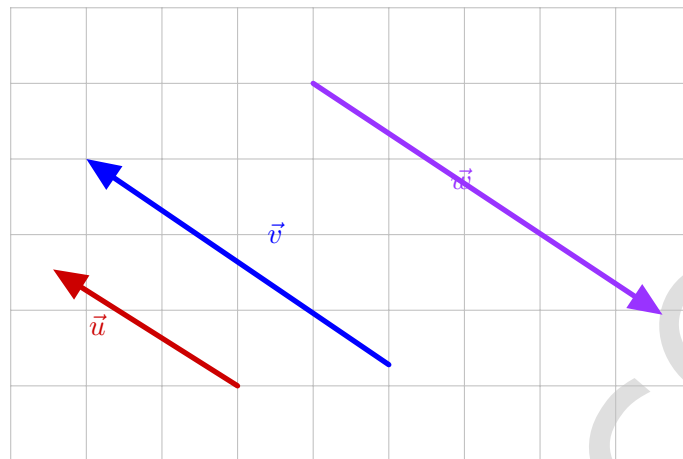
III – Vecteurs colinéaires dans l'espace

1. Définition



Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.



Proposition

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

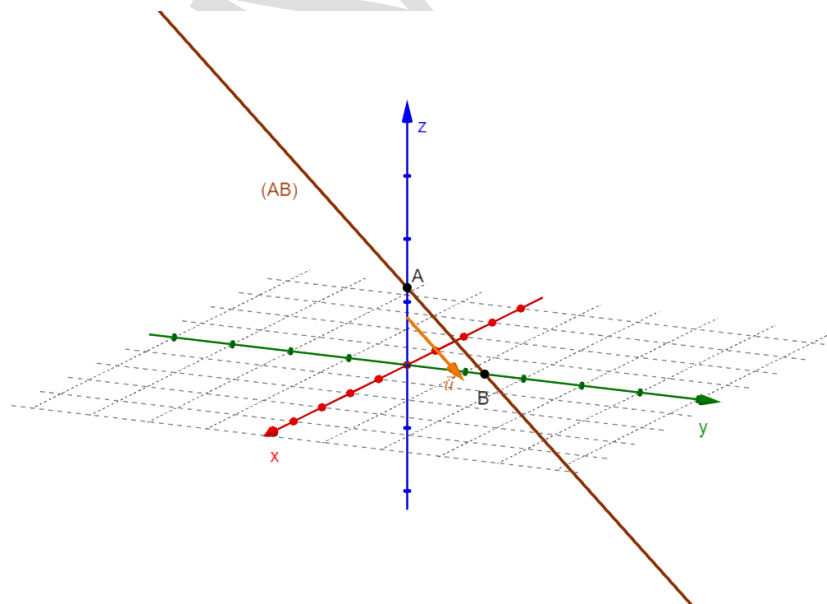
2. Droite dans l'espace



Définition 1

Soient A et B deux points de l'espace.

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB) .



Définition 2

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

L'ensemble $D(\vec{u})$ de tous les vecteurs de l'espace colinéaires avec $\vec{u}$ est appelée **la droite vectorielle**

de vecteur directeur $\vec{u}$.

Autrement dit : $D(\vec{u}) = \{ \vec{v} / \vec{v} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \}$.

Remarque

$D(\vec{u}) = D(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3. Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition

Soit A un point de l'espace, et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on la note $D(A, \vec{u})$.

$D(A, \vec{u}) = \{ M / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}, k \in \mathbb{R} \}$.

Remarque

- Tout vecteur $\vec{v} = k\vec{u} / k \neq 0$ est aussi un vecteur directeur de la droite $D(A, \vec{u})$.
- Si $B \in D(A, \vec{u})$ alors $D(A, \vec{u}) = D(B, \vec{u})$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $D(A, \vec{u}) = D(A, \lambda\vec{u})$
- Si A et B sont deux points de l'espace, alors : $M \in (AB) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

IV – Vecteurs coplanaires dans l'espace

1. Définition

Définition 1

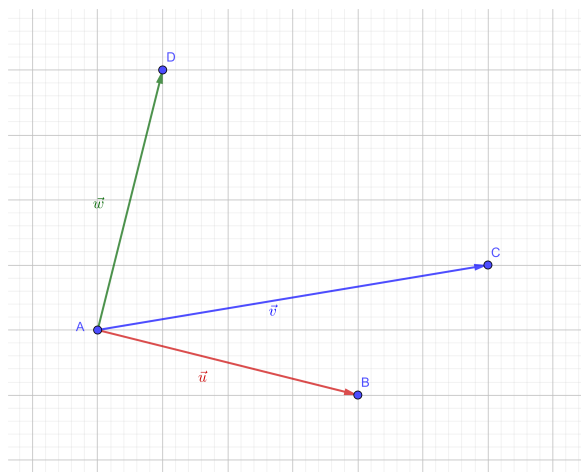
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe quatre points A, B, C et D de l'espace tels que :

- les points A, B, C et D appartiennent à un même plan
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

Remarque

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est coplanaire avec deux vecteurs quelconques de l'espace.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de l'espace, alors ils sont coplanaires avec un vecteur quelconque $\vec{w}$ de l'espace.



Proposition 1

Les vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si, et seulement si il existe (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Proposition 2

Soient A, B, C et M quatre points de l'espace.

Les points A, B, C et M sont **coplanaires** si, et seulement si il existe (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$.

2. Plan dans l'espace

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $P(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé **le plan vectoriel de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** .

Autrement dit : $P(\vec{u}, \vec{v}) = \{ \vec{w} / \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$

Définition 2

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est **le plan de l'espace qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** , noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

On a : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{ M / \vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$.

Remarque

- Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Alors (ABC) est le plan défini par :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}.$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace, alors on a :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{*2} \quad P(A, \vec{u}, \vec{v}) = P(A, \lambda\vec{u}, \mu\vec{v}).$$

V – Parallélisme dans l'espace

1. Parallélisme de deux droites dans l'espace

☐ Définition

Soient A et B deux points de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Les droites $D(A, \vec{u})$ et $D(B, \vec{v})$ sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Autrement dit : $D(A, \vec{u}) \parallel D(B, \vec{v}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \text{ tel que } \vec{v} = k\vec{u}$.

☐ Remarque

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors :
 $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \text{ tel que } \vec{CD} = k\vec{AB}$.

2. Parallélisme d'une droite et d'un plan dans l'espace

☐ Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
Autrement dit : $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

3. Parallélisme de deux plans dans l'espace

☐ Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si, et seulement si : $\begin{cases} \vec{u}, \vec{u}', \vec{v} \text{ sont coplanaires} \\ \vec{u}, \vec{u}', \vec{v}' \text{ sont coplanaires} \end{cases}$

Autrement dit :

$$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{u}' = x\vec{u} + y\vec{v} \\ \exists (x', y') \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = x'\vec{u}' + y'\vec{v}' \end{cases}$$

