



Série 1

Produit vectoriel dans l'espace

1 BAC SM

S. EL JAAFARI



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Exercice 1

1/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

- a) $\vec{u}(-1, 2, 1)$ et $\vec{v}(2, -1, 3)$.
- b) $\vec{u}(1, 1, -1)$ et $\vec{v}(0, 3, -2)$.
- c) $\vec{u}(3, 2, 1)$ et $\vec{v}(5, -2, 4)$.
- d) $\vec{u}(-2, 2, 2)$ et $\vec{v}(7, 3, -5)$.

2/ Soient $A(3, 2, 4)$, $B(0, 3, 5)$, $C(0, 2, 1)$ et $D(3, 1, 0)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AD}$.



Exercice 2

1/ On considère les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, -1, 1)$ et $\vec{w}(1, 0, 1)$.

- a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{U} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
- b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{w}$.
- c) Montrer que : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$.

2/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$.
Calculer $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

2/ Soit $\vec{u}(1, 1, 1)$ et $\vec{v}(2, 1, 2)$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\vec{u} \wedge \vec{v}$; $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $(3\vec{u}) \wedge (5\vec{v})$.

3/ Soit $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 1, 0)$ et $C(3, -1, 2)$ trois points de l'espace.

- a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
- c) Calculer l'aire S_{ABC} du triangle ABC .



Exercice 3

1/ Soit (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et B un point de l'espace.
Dans chacun des cas suivants, calculer $d(B, (\Delta))$:

- a) $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, -2)$ et $\vec{u}(-1, 1, 5)$.
- b) $A(4, -1, 0)$, $B(1, 3, -2)$ et $\vec{u}(2, -5, 3)$.

c) $A(0, 1, 0), B(4, 5, -3)$ et $\vec{u}(2, 3, 7)$.

2/ Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) dans chacun des cas suivants :

a) $A(1, 2, 0), B(3, -1, 2), C(-1, 5, 1)$.

b) $A(-2, 1, 3), B(0, 4, -2), C(1, 1, 1)$.

c) $A(-3, 1, ,), B(0, 1, -3), C(4, 5, 7)$.



Exercice 4

Dans l'espace, on considère les points $A(0, 0, -1), B(2, 0, 0), C(0, 1, 0), E(4, 2, 3)$.

1/ Déterminer le triplet des coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et en déduire que $x + 2y - 2z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

2/ Montrer que les points A, B, C, E sont coplanaires.

3/ Montrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $\vec{AM} \cdot \vec{EM} = 0$ est une sphère (S) de centre $\Omega(2, 1, 1)$ et de rayon $R = 3$.

4/ Vérifier que $\Omega \in (ABC)$ puis en déduire la position relative de (S) et (ABC) .

5/ Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et orthogonale au plan (ABC) . Montrer que $d(O, (\Delta)) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ où O est l'origine du repère.



Exercice 5

On considère les points $A(1, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 0, -1)$.

1/ a) Déterminer le triplet des coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b) En déduire que les points A, B, C ne sont pas alignés et calculer l'aire du triangle ABC .

2/ Soit $S(1, -1, 1)$. Montrer que le volume du tétraèdre $SABC$ est égale à $\frac{1}{2}$.

3/ Soit (Δ) la droite passant par A et parallèle à la droite (BC) et soit M un point de (Δ) .

a) Montrer que $\vec{MB} \wedge \vec{MC} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b) Déterminer le volume du tétraèdre $SMBC$.



Exercice 6

On considère les vecteurs $\vec{u}(0, 3, 1)$ et $\vec{v}(0, 1, 2)$.

1/ Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

2/ Déterminer les cosinus directeurs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

4/ Déterminer $\|\vec{w}\|$ par deux méthodes différentes.

5/ Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

6/ Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

7/ Déterminer $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.



Exercice 7

Les six sommets d'un prisme sont les points : $A(1, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $D(5, 0, 1)$, $E(4, 3, 1)$, $F(4, 0, 5)$.

1/ Vérifier que trois des faces de ce prisme sont des parallélogrammes. Sont-elles des rectangulaires ?

2/ Calculer la longueur AD.

3/ Calculer l'aire du triangle ABC .

4/ Trouver le volume de ce prisme.



Exercice 8

On considère les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(-1, 1, 4)$, $D(2, -3, 1)$ de l'espace.

1/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis en déduire l'aire du triangle ABC .

2/ Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

3/ Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ à l'aide du produit mixte $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$.

4/ En déduire la distance du point D au plan (ABC) uniquement à partir des résultats précédents.



Exercice 9

Dans l'espace, on considère les droites $(D_1) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $(D_2) : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \\ z = 4 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

1/ Montrer que les droites (D_1) et (D_2) ne sont ni parallèles ni sécantes.

2/ Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs directeurs respectifs des droites (D_1) et (D_2) . Montrer que le vecteur $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ est orthogonal aux deux droites (D_1) et (D_2) .

3/ Soit M_1 un point de (D_1) et soit M_2 un point de (D_2) . Etablir que la distance entre les deux droites est donnée par : $d(D_1, D_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

4/ Calculer la valeur de cette distance.



Exercice 10

Soient a, b et c trois vecteurs de l'espace.

1/ Démontrer que : $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

2/ En déduire la formule appelée "identité de Jacobi" :

$$a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = \vec{0}.$$

3/ Montrer "l'identité de Lagrange" :

$$(a \cdot b)^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \times \|b\|^2.$$

4/ Application : Soit $a(1, -1, 2)$ et $b(2, 1, 0)$ deux vecteurs de l'espace. Trouver tous les vecteurs x tel que :

$$a \wedge x = b \quad \text{et} \quad a \cdot x = 3$$



Exercice 11

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1 où $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$.

1/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, puis conclure.

2/ Calculer l'aire du triangle BDG .

3/ Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$.

4/ Calculer la distance de A à la droite (BD) .