



Série Corrigée 1

Limites et Continuité

2 BIOF PC et SVT

S. EL JAAFARI



I- Énoncés des exercices



Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x$

11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin(4x)}$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)(\cos x - 1)}{x^3}$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \tan x}{\cos(2x) - 1}$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} \sin x$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cos x}{3x^2 - 1}$



Exercice 2

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$

2) $g(x) = \frac{2x + 3}{2x^2 - x - 15}$

3) $h(x) = \sqrt{(x-2)(x^2 - 4x - 5)}$

4) $i(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{x(x+1)}}$

5) $j(x) = \frac{\sqrt{2-x} + 1}{(x-2)(x+1)}$

6) $l(x) = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{6-x-x^2}}$



Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $x_0 = 2$

2) $f(x) = \sqrt{3x-1}$; $x_0 = 3$

3) $f(x) = \sin x + \cos x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

4)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases} ; x_0 = 1$$

5)
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - 2 & ; x \geq 0 \\ f(x) = -\frac{\sin x}{x} & ; x < 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$

6)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} & ; x > 1 \\ f(1) = 2 & ; x_0 = 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{4-2\sqrt{5-x}} & ; x < 1 \end{cases}$$



Exercice 4

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

1) $f(x) = x^2 + x - \frac{x}{x+3} + \cos x$;
 $I =]-3; +\infty[$

2)
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2+2x-3}{4x^2-5x+1} & ; x < 1 \\ g(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2})} & ; x > 1 \\ g(1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

 $I = \mathbb{R}$

3)
$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} & ; x > 2 \\ h(x) = \frac{2x+11}{3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

 $I = \mathbb{R}$

4)
$$\begin{cases} k(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & ; x \neq 2 \\ k(2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

 $I = \mathbb{R}$



Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1} & ; x < 1 \\ f(x) = x - 2 & ; x > 1 \\ f(1) = c \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$.



Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 - (1+a)x + 1}{b(x^2 - 1)} & ; |x| \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue en 1 et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

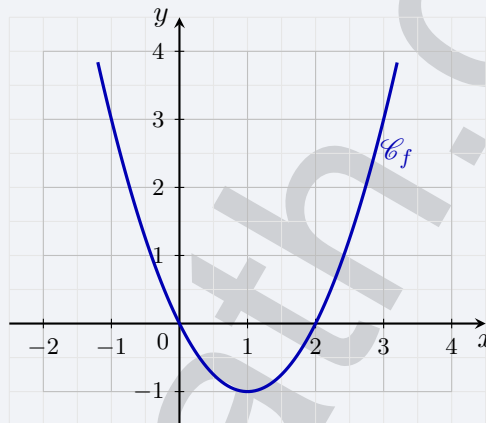


Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Déterminer graphiquement les images par la fonction f des intervalles suivants :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $I = [-1; 1]$ | 2) $J =]1; 3[$ |
| 3) $K =]-1; 3]$ | 4) $L =]-\infty; 2]$ |
| 5) $M =]0; +\infty[$ | |



Exercice 8

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Déterminer les images par la fonction g des intervalles suivants :

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $I = [0; 3[$ | 2) $J = [4; +\infty[$ |
| 3) $K =]-\infty; 3]$ | 4) $L = [0; 2]$ |



Exercice 9

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 + x - 3$$

- 1/ Montrer que l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$.
- 2/ Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$.



Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I :

- 1) $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$; $I = [0; 1]$
- 2) $f(x) = 2 \sin x - x$; $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$
- 3) $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$; $I = [1; 4]$



Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I :

- 1) $f(x) = x^3 + 2x - 2$; $I = [0; 1]$
- 2) $f(x) = x^4 + 2x - 5$; $I = [1; +\infty[$
- 3) $f(x) = 1 + 2 \sin x + 3x$; $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$



Exercice 12

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

- 1/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- 2/ Montrer que : $1 < \alpha < 2$.
- 3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .



Exercice 13



- 1/ Montrer que l'équation : $x^3 + 4x + 9 = 5x^2 + 2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
- 2/ Montrer que l'équation : $x = \cos x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; \pi]$.
- 3/ Montrer que l'équation : $1 + \sin x = 2x$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.



Exercice 14

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$$

- 1/ Déterminer D_f .
- 2/
 - a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$.
 - b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-2; +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Calculer $g(-1)$ et en déduire $g^{-1}(1)$.
 - c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.



Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

- 1/
 - a) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathbb{R}^*$.
 - b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$.
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 2/ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
 - a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Calculer $h(2)$, puis en déduire $h^{-1}(2)$.
 - c) Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.



II– Corrigés des exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On factorise par $(x - 2)$ au numérateur et au dénominateur :

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1) \quad \text{et} \quad x^2 - 2x = x(x - 2)$$

Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2 + 1}{x}$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{5}{2}$.

2/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On utilise la quantité conjuguée du numérateur :

$$\frac{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x - 1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x+8} + 3)}$$

Pour $x \neq 1$: $\frac{1}{\sqrt{x+8} + 3}$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1} = \frac{1}{6}$.

3/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On sépare la fraction en deux :

$$\sqrt{x+1} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Quand $x \rightarrow 1^+$, $\sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \rightarrow 0$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{2}$.

4/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. En utilisant la double quantité conjuguée :

$$\frac{(4-x)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} = -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = -\frac{1}{3}$.

5/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On réécrit sous la forme :

$$x \times \frac{\sin(x(x-1))}{x(x-1)}$$

Par limite usuelle en 0 : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1} = 1$.



- 6/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$:
F.I. $\frac{\infty}{\infty}$. En factorisant par x :

$$\frac{2 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Donc la limite vaut 2.

- 7/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x$:
F.I. $\infty - \infty$. Par quantité conjuguée :

$$\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

La limite vaut $\frac{1}{2}$.

- 8/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x$:
F.I. $\infty - \infty$. En factorisant par x :

$$x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 \right)$$

Le bloc entre parenthèses tend vers -1 , donc par produit : $-\infty$.

- 9/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x$:
F.I. $\infty - \infty$. Attention, pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Par quantité conjuguée :

$$\frac{x + 1}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2}$$

La limite vaut $\frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$.

- 10/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x$:
En factorisant par x (avec $\sqrt{x^2} = -x$) :

$$x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \right)$$

Le bloc tend vers $1 > 0$, donc par produit avec $x \rightarrow -\infty$: $-\infty$.

- 11/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$:
F.I. $\frac{0}{0}$. En factorisant par $(x - 2)$:

$$\frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{x - 3}{x + 1}$$

La limite vaut $-\frac{1}{3}$.

- 12/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin(4x)}$:
F.I. $\frac{0}{0}$. Par quantité conjuguée au numérateur :

$$\frac{4x}{\sin(4x)} \times \frac{1 + x}{4(\sqrt{1 + x + x^2} + 1)}$$

La limite vaut $1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.



13/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)(\cos x - 1)}{x^3}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. En utilisant les formes usuelles :

$$3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} \times \left(-\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

La limite vaut $3 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}$.

14/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \tan x}{\cos(2x) - 1}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. En factorisant par x au numérateur :

$$\frac{x^2 + \frac{\tan x}{x}}{-4x \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2}}$$

Le numérateur tend vers 1. Le dénominateur tend vers 0 en changeant de signe selon que $x \rightarrow 0^+$ ou 0^- . Les limites unilatérales sont $\pm\infty$.

15/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} \sin x$:

Par encadrement, car $\left| \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} \sin x \right| \leq \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$. La limite vaut 0.

16/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \cos x}{3x^2 - 1}$:

En factorisant par x^2 :

$$\frac{1 + \frac{\cos x}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}}$$

Comme $\frac{\cos x}{x^2} \rightarrow 0$, la limite est $\frac{1}{3}$.

✓ Solution Exercice 2

1/ $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$:

La fonction f est une fonction polynomiale. Elle est donc définie pour tout nombre réel x . Alors :

$$\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$$

2/ $g(x) = \frac{2x + 3}{2x^2 - x - 15}$:

La fonction g existe si et seulement si son dénominateur est non nul : $2x^2 - x - 15 \neq 0$.

Résolvons l'équation $2x^2 - x - 15 = 0$ à l'aide du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-15) = 1 + 120 = 121 = 11^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{1 - 11}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 11}{4} = 3$$

$$\mathbf{D_g} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2}; 3 \right\}$$

3/ $h(x) = \sqrt{(x-2)(x^2 - 4x - 5)}$:

La fonction h est définie si et seulement si l'expression sous la racine est positive ou nulle :

$$(x-2)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$$



Trouvons les racines de $x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 16 - 4(1)(-5) = 36 = 6^2$, d'où $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.
Dressons un tableau de signes pour le produit des facteurs :

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$x - 2$		-	-	+	+
$x^2 - 4x - 5$	+	0	-	0	+
Produit	-	0	+	0	+

L'expression est positive ou nulle sur :

$$\mathbf{D_h} = [-1 ; 2] \cup [5 ; +\infty[$$

4/ $i(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{x(x+1)}}$:

Ici, la fraction sous la racine doit être positive ou nulle, et le dénominateur non nul :

$$\frac{3x-4}{x(x+1)} \geq 0 \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1$$

La valeur d'annulation du numérateur est $x = \frac{4}{3}$. Établissons le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x - 4$		-	-	-	+
$x(x+1)$	+	0	-	0	+
Quotient	-	+	-	0	+

$$\mathbf{D_i} =]-1 ; 0[\cup \left[\frac{4}{3} ; +\infty \right[$$

5/ $j(x) = \frac{\sqrt{2-x}+1}{(x-2)(x+1)}$:

On a deux conditions simultanées :

(a) Pour la racine carrée : $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$.

(b) Pour le dénominateur : $(x-2)(x+1) \neq 0 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -1$.

En combinant ces conditions ($x \in]-\infty ; 2]$ privé de 2 et -1), on obtient :

$$\mathbf{D_j} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 2[$$

6/ $l(x) = \frac{x^2+x-2}{\sqrt{6-x-x^2}}$:

La racine étant strictement au dénominateur, le trinôme doit être strictement positif :

$$6 - x - x^2 > 0 \iff -x^2 - x + 6 > 0$$



Calculons le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25 = 5^2$.

Les racines du trinôme sont $x_1 = \frac{1-5}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{1+5}{-2} = -3$.

Comme le coefficient de x^2 est négatif (-1) , le trinôme est strictement positif à l'intérieur des racines :

$$D_1 =] - 3 ; 2[$$

✓ Solution Exercice 3

Rappel théorique : f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Si la fonction est définie par morceaux, il faut vérifier l'égalité des limites à gauche et à droite : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

1/ Étude en $x_0 = 2$ pour $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$:

f est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 2. Calcul de l'image :

$$f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3.$$

$$\text{Calcul de la limite : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 3.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, f est continue en $x_0 = 2$.

2/ Étude en $x_0 = 3$ pour $f(x) = \sqrt{3x-1}$:

f est définie sur $[1/3; +\infty[$. Calcul de l'image : $f(3) = \sqrt{3(3)-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Calcul de la limite : } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, f est continue en $x_0 = 3$.

3/ Étude en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pour $f(x) = \sin x + \cos x$:

f est la somme de fonctions trigonométriques continues sur $\mathbb{R}$. Calcul de l'image : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$.

$$\text{Calcul de la limite : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) = 1 + 0 = 1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, f est continue en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

4/ Étude en $x_0 = 1$ pour la fonction définie par morceaux : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$

On a $f(1) = \frac{1}{4}$. Calculons la limite quand $x \rightarrow 1^+$ (qui correspond à la F.I. "0/0") en utilisant la quantité conjuguée :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\text{Pour } x > 1 : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}$. Donc f est continue en $x_0 = 1$.

5/ Étude en $x_0 = 0$ pour la fonction définie par morceaux : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1}-2 & ; x \geq 0 \\ f(x) = -\frac{\sin x}{x} & ; x < 0 \end{cases}$

On a $f(0) = \sqrt{0+1}-2 = 1-2 = -1$.

• Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x+1}-2) = -1$.



- Limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -(1) = -1$ (d'après la limite usuelle).

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -1$, alors : f est continue en $x_0 = 0$.

6/ Étude en $x_0 = 1$ pour la fonction définie par morceaux :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} & ; x > 1 \\ f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{x - 1}{4 - 2\sqrt{5 - x}} & ; x < 1 \end{cases}.$$

On a $f(1) = 2$. Calculons séparément les limites unilatérales :

- À droite ($x \rightarrow 1^+$) : on a une F.I. " $\frac{0}{0}$ ". Remarquons que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) \times \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

En posant $X = x^2 - 1$, quand $x \rightarrow 1^+$, $X \rightarrow 0^+$. Par limite usuelle $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin X}{X} = 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1 + 1) \times 1 = 2$.

- À gauche ($x \rightarrow 1^-$) : on a une F.I. " $\frac{0}{0}$ ". Utilisons l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\frac{x - 1}{4 - 2\sqrt{5 - x}} = \frac{x - 1}{2(2 - \sqrt{5 - x})} = \frac{(x - 1)(2 + \sqrt{5 - x})}{2(4 - (5 - x))} = \frac{(x - 1)(2 + \sqrt{5 - x})}{2(x - 1)}$$

Pour $x < 1$, on simplifie par $(x - 1)$: $\frac{x - 1}{4 - 2\sqrt{5 - x}} = \frac{2 + \sqrt{5 - x}}{2}$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2 + \sqrt{5 - 1}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2$, alors f est continue en $x_0 = 1$.

✓ Solution Exercice 4

Méthode : Pour étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle I , on montre d'abord qu'elle est continue sur les intervalles ouverts par opérations sur les fonctions usuelles, puis on étudie spécifiquement la continuité aux points de raccordement (par les limites à gauche et à droite).

1/ Continuité de f sur $I =]-3; +\infty[$:

L'expression est composée de trois éléments :

- $x \mapsto x^2 + x$ est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \frac{x}{x + 3}$ est une fonction rationnelle, définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- $x \mapsto \cos x$ est une fonction trigonométrique continue sur $\mathbb{R}$.

Par somme et différence de fonctions continues sur $] - 3 ; +\infty[$, f est continue sur I .

2/ Continuité de g sur $I = \mathbb{R}$:

- Sur $] - \infty ; 1[$, g est une fonction rationnelle dont le dénominateur $4x^2 - 5x + 1$ s'annule en 1 et $\frac{1}{4}$. Donc g est continue sur $] - \infty ; \frac{1}{4}[$ et sur $]\frac{1}{4} ; 1[$. Attention : g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ entier à cause de la valeur interdite en $x = \frac{1}{4}$.



- Sur $]1; +\infty[$, par quotient et différence de fonctions continues (le dénominateur ne s'annule pas), g est continue.

- **Étude en $x_0 = 1$** : On a $g(1) = \frac{4}{3}$.

À gauche ($x \rightarrow 1^-$) : F.I. " $\frac{0}{0}$ ". On factorise les trinômes par $(x - 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(4x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{4x-1} = \frac{1+3}{4(1)-1} = \frac{4}{3}$$

À droite ($x \rightarrow 1^+$) : F.I. " $\frac{0}{0}$ ". On factorise le numérateur $(x-1)(2x-1)$ et on multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+2})}{3((3x+1)-(2x+2))} = \frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+2})}{3(x-1)}$$

Pour $x > 1$, on simplifie par $(x-1)$: $\frac{(2x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+2})}{3}$.

$$\text{Sa limite vaut : } \frac{(2(1)-1)(\sqrt{4} + \sqrt{4})}{3} = \frac{1 \times 4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \frac{4}{3}$, alors g est continue en 1.

Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$.

3/ Continuité de h sur $I = \mathbb{R}$:

- Sur $]2; +\infty[$, h est continue comme fonction rationnelle (dénominateur non nul).
- Sur $] -\infty; 2[$, h est continue comme fonction affine.
- **Étude au point de raccordement $x_0 = 2$** :

$$\text{À gauche } (x \leq 2) : \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = h(2) = \frac{2(2) + 11}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

À droite ($x \rightarrow 2^+$) : F.I. " $\frac{0}{0}$ ". On factorise le numérateur : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) = 2+3 = 5$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = h(2) = 5$, h est continue sur $\mathbb{R}$.

4/ Continuité de k sur $I = \mathbb{R}$:

- Sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, la fonction k est continue par quotient et somme de fonctions usuelles continues.
- **Étude en $x_0 = 2$** : On a $k(2) = \frac{2}{3}$.
Calculons la limite de k en 2 (F.I. " $\frac{0}{0}$ ") à l'aide de la quantité conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+5)-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3} = \frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = k(2) = \frac{2}{3}$, alors k est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution Exercice 5

Méthode : Pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = c$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1} & ; x < 1 \\ f(x) = x - 2 & ; x > 1 \\ f(1) = c \end{cases}$$

○ **Détermination de c (Limite à droite) :**

Calculons la limite à droite de f en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

Par continuité, on doit avoir $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, d'où :

$$c = -1$$

○ **Détermination de a (Condition nécessaire pour la limite à gauche) :**

Étudions le dénominateur de la première expression lorsque $x \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + bx - b - 1) = 1^2 + b(1) - b - 1 = 0$$

Le dénominateur tend vers 0. Pour que la limite de la fraction soit finie (égale à -1), il est nécessaire que le numérateur tende également vers 0 lorsque $x \rightarrow 1^-$ (pour obtenir une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ " susceptible d'être levée).

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - ax + 3) = 1 - a + 3 = 4 - a$$

On impose donc $4 - a = 0$, ce qui donne :

$$a = 4$$

○ **Détermination de b (Calcul de la limite à gauche) :**

En remplaçant a par 4, factorisons le numérateur et le dénominateur par $(x - 1)$:

– Numérateur : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

– Dénominateur : $x^2 + bx - b - 1 = (x^2 - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = (x - 1)(x + 1 + b)$

Pour $x < 1$, l'expression de $f(x)$ devient après simplification :

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)(x + 1 + b)} = \frac{x - 3}{x + 1 + b}$$

Calculons maintenant sa limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1 - 3}{1 + 1 + b} = \frac{-2}{2 + b}$$

Pour assurer la continuité, cette limite doit être égale à $c = -1$:

$$\frac{-2}{2 + b} = -1 \iff -2 = -1(2 + b) \iff -2 = -2 - b \iff b = 0$$

Conclusion : La fonction f est continue en $x_0 = 1$ si et seulement si :

$$a = 4 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = -1$$

 Solution Exercice 6


Méthode : Pour déterminer les réels a et b , nous allons exploiter les deux conditions de l'énoncé de manière indépendante pour former un système d'équations.

a) Exploitation de la limite en $+\infty$:

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{bx^2} = \frac{a}{b}$$

L'énoncé impose que cette limite soit égale à $\frac{1}{2}$, on obtient donc notre première relation :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \iff \mathbf{b = 2a} \quad (\text{Équation 1})$$

b) Exploitation de la continuité en 1 :

Pour que f soit continue en 1, il faut que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{6}$.

Calculons cette limite (qui se présente initialement sous la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "). Factorisons le numérateur par $(x - 1)$:

$$ax^2 - (1 + a)x + 1 = ax^2 - x - ax + 1 = ax(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(ax - 1)$$

Le dénominateur se factorise par l'identité remarquable : $b(x^2 - 1) = b(x - 1)(x + 1)$.

Pour $|x| \neq 1$, l'expression de $f(x)$ se simplifie ainsi :

$$f(x) = \frac{(x - 1)(ax - 1)}{b(x - 1)(x + 1)} = \frac{ax - 1}{b(x + 1)}$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{a(1) - 1}{b(1 + 1)} = \frac{a - 1}{2b}$$

On impose que cette limite soit égale à $f(1) = \frac{1}{6}$:

$$\frac{a - 1}{2b} = \frac{1}{6} \iff 6(a - 1) = 2b \iff 3(a - 1) = b \iff \mathbf{b = 3a - 3} \quad (\text{Équation 2})$$

c) Résolution du système :

En égalisant l'Équation 1 et l'Équation 2, on obtient :

$$2a = 3a - 3 \iff 3a - 2a = 3 \iff \mathbf{a = 3}$$

En remplaçant $a = 3$ dans l'Équation 1 ($b = 2a$) :

$$b = 2 \times 3 \iff \mathbf{b = 6}$$

Conclusion : La fonction f est continue en 1 et possède la limite attendue en $+\infty$ si et seulement si :

$$\mathbf{a = 3 \quad \text{et} \quad b = 6}$$

Solution Exercice 7

Méthode : Trouver l'image d'un intervalle par une courbe revient à repérer toutes les valeurs de l'axe des ordonnées (y) atteintes par les points de la courbe dont les abscisses (x) appartiennent à cet intervalle. On prend garde aux extremums locaux qui peuvent clore un intervalle même si les bornes de départ sont ouvertes.

- **Image de $I = [-1; 1]$:**

Lorsque x varie de -1 à 1 , la fonction f décroît continûment de $f(-1) = 3$ jusqu'au minimum de la courbe atteint au sommet $f(1) = -1$. Toutes les valeurs de l'ordonnée sont balayées entre -1 et 3 (bornes incluses).

$$f(I) = [-1; 3]$$

- **Image de $J =]1; 3[$:**

Sur l'intervalle $]1; 3[$, la fonction f est strictement croissante. Les ordonnées correspondantes augmentent de $f(1) = -1$ (exclu car $x > 1$) jusqu'à $f(3) = 3$ (exclu car $x < 3$).

$$f(J) =]-1; 3[$$

- **Image de $K =]-1; 3]$:**

Cet intervalle contient la valeur $x = 1$, où la fonction atteint son minimum absolu. L'ordonnée minimale de l'image est donc -1 (qui est inclus, car $1 \in K$).

Pour les valeurs maximales, aux bornes on a $f(-1) = 3$ (exclu) et $f(3) = 3$ (inclus). Le maximum atteint est donc 3 .

$$f(K) = [-1; 3]$$

- **Image de $L =]-\infty; 2]$:**

L'intervalle L contient également le sommet de la parabole en $x = 1$, la valeur minimale atteinte sur l'axe des ordonnées est donc -1 .

Lorsque x tend vers $-\infty$, la courbe remonte de manière illimitée vers $+\infty$.

$$f(L) = [-1; +\infty[$$

- **Image de $M =]0; +\infty[$:**

Ici encore, la valeur $x = 1$ appartient à l'intervalle, fixant la borne minimale de l'image à -1 (inclus).

Lorsque x grandit vers $+\infty$, les ordonnées s'élèvent vers $+\infty$.

$$f(M) = [-1; +\infty[$$

Solution Exercice 8

Étude préliminaire : La fonction g est une fonction homographique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Sa dérivée est $g'(x) = \frac{2(x-3) - 1(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$. Comme $g'(x) < 0$, la fonction g est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 3[$ et $]3; +\infty[$. Nous utiliserons cette monotonie pour déterminer les images.

- **Image de $I = [0; 3[$:**

La fonction g est strictement décroissante sur $[0; 3[$.

– À la borne inférieure : $g(0) = \frac{2(0)+1}{0-3} = -\frac{1}{3}$.

– À la borne supérieure : $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x+1) = 7$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$.



Puisque la fonction est décroissante, l'ordre des bornes s'inverse :

$$g(I) =]-\infty; -\frac{1}{3}]$$

• **Image de $J = [4; +\infty[$:**

La fonction g est strictement décroissante sur $[4; +\infty[$.

– À la borne inférieure : $g(4) = \frac{2(4)+1}{4-3} = \frac{9}{1} = 9$.

– À la borne supérieure (termes de plus haut degré) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

En inversant les bornes à cause de la décroissance, on obtient :

$$g(J) =]2; 9]$$

• **Image de $K =]-\infty; 3[$:**

La fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty; 3[$.

– À la borne inférieure : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$.

– À la borne supérieure : $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$.

L'ordre inversé donne :

$$g(K) =]-\infty; 2[$$

• **Image de $L = [0; 2]$:**

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[0; 2]$. Il suffit de calculer les images des deux extrémités de l'intervalle :

– $g(0) = -\frac{1}{3}$

– $g(2) = \frac{2(2)+1}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$

Par décroissance, on intervertit l'ordre pour écrire l'intervalle du plus petit au plus grand élément :

$$g(L) = \left[-5; -\frac{1}{3}\right]$$

✓ **Solution Exercice 9**

Étude préliminaire de la fonction h :

La fonction h est une fonction polynomiale, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa dérivée est : $h'(x) = 3x^2 + 1$.

Puisque $x^2 \geq 0$, on a $3x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x . La fonction h est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
h	$-\infty$	$+\infty$



1/ Montrons que $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans $]1; 2[$:

- h est continue sur l'intervalle $[1; 2]$.
- Calculons les images des bornes :

$$h(1) = 1^3 + 1 - 3 = -1$$

$$h(2) = 2^3 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$$

- Le nombre 4 est bien compris entre $h(1)$ et $h(2)$ (on a $-1 < 4 < 7$).

D'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)**, l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$.

(Note : Comme h est strictement monotone, cette solution est même unique).

2/ Justifions que $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$:

- h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Les limites aux infinis sont : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

La fonction h réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ (car $-\infty < 0 < +\infty$), d'après le corollaire du TVI (théorème de la bijection), **l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.**

Encadrement de α : Calculons la valeur de la fonction en $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$:

- $h(1) = -1$ (donc $h(1) < 0$)
- $h\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{27}{8} + \frac{12}{8} - \frac{24}{8} = \frac{15}{8}$ (donc $h\left(\frac{3}{2}\right) > 0$)

Comme $h(1) < 0 < h\left(\frac{3}{2}\right)$ et que la fonction est strictement croissante, l'unique valeur α pour laquelle $h(\alpha) = 0$ se situe nécessairement entre ces deux bornes. On en déduit que :

$$\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$$

✓ Solution Exercice 10

Rappel : D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a; b]$, et si 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire que $f(a) \times f(b) \leq 0$), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

1/ Étude de $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$ sur $I = [0; 1]$:

- f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Calculons les images des extrémités de l'intervalle :

$$f(0) = 0^4 + 0^2 + 2(0) - 1 = -1 \quad (\text{donc } f(0) < 0)$$

$$f(1) = 1^4 + 1^2 + 2(1) - 1 = 1 + 1 + 2 - 1 = 3 \quad (\text{donc } f(1) > 0)$$



Comme f est continue et que $f(0) \times f(1) < 0$ (le signe change), d'après le **TVI**, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

2/ **Étude de $f(x) = 2 \sin x - x$ sur $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$:**

- f est la différence de fonctions usuelles ($x \mapsto 2 \sin x$ et $x \mapsto x$) continues sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
- Calculons les images des extrémités de l'intervalle :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Or, $\sqrt{3} \approx 1,732$ et $\frac{\pi}{3} \approx 1,047$, donc $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$.

$$f(\pi) = 2 \sin(\pi) - \pi = 2(0) - \pi = -\pi \quad (\text{donc } f(\pi) < 0)$$

La fonction f est continue et 0 est compris entre $f(\pi)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ car $f(\pi) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. D'après le **TVI**, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

3/ **Étude de $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$ sur $I = [1; 4]$:**

- $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto -5\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Par somme, la fonction f est continue sur l'intervalle $[1; 4]$.
- Calculons les images des extrémités de l'intervalle :

$$f(1) = 1^2 - 5\sqrt{1} + 1 = 1 - 5 + 1 = -3 \quad (\text{donc } f(1) < 0)$$

$$f(4) = 4^2 - 5\sqrt{4} + 1 = 16 - 10 + 1 = 7 \quad (\text{donc } f(4) > 0)$$

La fonction f est continue sur $[1; 4]$ et change de signe aux bornes ($f(1) < 0 < f(4)$). D'après le **TVI**, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 4]$.

✓ Solution Exercice 11

Rappel : Pour démontrer qu'une équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution sur un intervalle I , on utilise le théorème de la bijection (corollaire du TVI). Il faut valider trois conditions : la continuité de f sur I , la stricte monotonie de f sur I (démontrée par le signe de la dérivée), et le fait que 0 soit compris entre les bornes de l'intervalle image $f(I)$.

1/ **Étude de $f(x) = x^3 + 2x - 2$ sur $I = [0; 1]$:**

- **Continuité :** f est une fonction polynomiale, donc continue sur $[0; 1]$.
- **Monotonie :** Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 3x^2 + 2$. Comme $x^2 \geq 0$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f est donc **strictement croissante** sur $[0; 1]$.
- **Valeurs aux bornes :**

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 2 = -2 \quad (\text{donc } f(0) < 0)$$

$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 2 = 1 \quad (\text{donc } f(1) > 0)$$

Puisque f est continue, strictement croissante et change de signe sur $[0; 1]$ (car $-2 < 0 < 1$), d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[0; 1]$.



2/ Étude de $f(x) = x^4 + 2x - 5$ sur $I = [1; +\infty[$:

- **Continuité** : f est une fonction polynomiale, donc continue sur $[1; +\infty[$.
- **Monotonie** : Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = 4x^3 + 2$. Puisque $x \geq 1$, $x^3 > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est **strictement croissante** sur $[1; +\infty[$.
- **Valeurs aux bornes** :

$$f(1) = 1^4 + 2(1) - 5 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

La fonction f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'intervalle image $f(I) = [-2; +\infty[$. Comme $0 \in [-2; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[1; +\infty[$.

3/ Étude de $f(x) = 1 + 2 \sin x + 3x$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$:

- **Continuité** : f est continue comme somme de fonctions usuelles continues ($\sin x$ et fonction affine).
- **Monotonie** : Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$, $f'(x) = 2 \cos x + 3$.
On sait que pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$. En multipliant par 2 et en ajoutant 3 :

$$-2 \leq 2 \cos x \leq 2 \implies 1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5$$

Ainsi, $f'(x) \geq 1 > 0$ sur I . La fonction f est donc **strictement croissante** sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

- **Valeurs aux bornes** :

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 1 - 1 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad (< 0)$$

$$f(\pi) = 1 + 2 \sin(\pi) + 3\pi = 1 + 2(0) + 3\pi = 1 + 3\pi \quad (> 0)$$

La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe aux extrémités de l'intervalle (car $-\frac{\pi}{2} < 0 < 1 + 3\pi$). D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

✓ Solution Exercice 12

1/ Montrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$:

Étudions d'abord les variations de la fonction g . Elle est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$.

Les racines de la dérivée sont $x = 0$ et $x = 1$. Le signe de $g'(x)$ est positif à l'extérieur des racines (car le coefficient de x^2 est $6 > 0$).

Calculons les valeurs remarquables et les limites aux infinis :

- $g(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 - 1 = -1$
- $g(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

Dressons le tableau de variations complet :



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

D'après le tableau de variations :

- Sur $] -\infty ; 1]$, le maximum de la fonction est -1 . L'expression $g(x)$ y est strictement négative, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
- Sur $[1 ; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur l'intervalle image $[-2 ; +\infty[$. Comme $0 \in [-2 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $\mathbb{R}$ (et on a $\alpha > 1$).

2/ Montrons que $1 < \alpha < 2$:

On sait déjà que $\alpha \in [1 ; +\infty[$, donc $1 < \alpha$. Calculons l'image de la borne supérieure $x = 2$:

$$g(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 1 = 2(8) - 3(4) - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$$

On constate que $g(1) = -2 < 0$ et $g(2) = 3 > 0$. Comme la fonction g est strictement croissante sur $[1 ; 2]$, l'unique valeur α s'annulant en 0 est nécessairement comprise entre les antécédents de ces deux bornes. On en déduit bien que :

$$1 < \alpha < 2$$

3/ Signe de $g(x)$ selon les valeurs de x :

La fonction g s'annule uniquement en α . Comme elle est strictement croissante sur l'intervalle qui contient α , elle passe des valeurs négatives aux valeurs positives. Nous pouvons résumer le signe de $g(x)$ dans un tableau de signes tkz-tab :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

C'est-à-dire :

- Pour tout $x \in] -\infty ; \alpha[$: $g(x) < 0$
- Pour $x = \alpha$: $g(\alpha) = 0$
- Pour tout $x \in]\alpha ; +\infty[$: $g(x) > 0$

Solution Exercice 13

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 4x + 9 - (5x^2 + 2) = x^3 - 5x^2 + 4x + 7.$$

L'équation $x^3 + 4x + 9 = 5x^2 + 2$ équivaut à $f(x) = 0$.

- f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-1; 0]$.
- $f(-1) = -1 - 5 - 4 + 7 = -3 < 0$ et $f(0) = 7 > 0$, donc $f(-1) \times f(0) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]-1; 0[$ tel que $f(c) = 0$.

Donc l'équation admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2/ Soit g la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $g(x) = x - \cos x$. L'équation $x = \cos x$ équivaut à $g(x) = 0$.

- g est continue sur $[0; \pi]$ comme différence de deux fonctions continues.
- $g(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ et $g(\pi) = \pi - \cos \pi = \pi + 1 > 0$, donc $g(0) \times g(\pi) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $x_0 \in]0; \pi[$ tel que $g(x_0) = 0$.

Donc l'équation $x = \cos x$ admet au moins une solution dans $[0; \pi]$.

3/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + \sin x - 2x$.

L'équation $1 + \sin x = 2x$ équivaut à $h(x) = 0$.

Existence et unicité. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \cos x - 2.$$

Comme $\cos x \leq 1$, on a $h'(x) \leq -1 < 0$. Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Limites : pour tout x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc

$$-2x \leq h(x) \leq 2 - 2x.$$

Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ contient 0. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Encadrement de α . On calcule :

$$h(0) = 1 > 0, \quad h\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} \approx 0,45 > 0,$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 - \pi = 2 - \pi < 0.$$

Comme h est strictement décroissante et $h(\alpha) = 0$:

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) > h(\alpha) > h\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ tel que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$. D'où l'équation $1 + \sin x = 2x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ tel que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

 Solution Exercice 14

1/ **Détermination de D_f** f est une fonction rationnelle; elle est définie si et seulement si $x + 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$. Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[.$$

2/ a) **Calcul de la dérivée** f est dérivable sur D_f comme fonction rationnelle. Pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - 1 \times (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

b) **Tableau de variation** Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2; +\infty[$.

Limites :

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} (2x+3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
f	2	$+\infty$ $-\infty$	2

3/ a) **Fonction réciproque** g est la restriction de f à $I =]-2; +\infty[$.

- g est continue sur I (fonction rationnelle définie sur I).
- g est strictement croissante sur I (d'après 2/b).

Donc g réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J = g(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; 2[.$$

Par conséquent, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J =]-\infty; 2[$.

b) **Calcul de $g(-1)$ et de $g^{-1}(1)$** On a $-1 \in I$ et

$$g(-1) = \frac{2 \times (-1) + 3}{-1 + 2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc $g(-1) = 1$, ce qui donne $g^{-1}(1) = -1$.

c) **Expression de $g^{-1}(x)$** Soit $x \in J =]-\infty; 2[$ et $y \in I =]-2; +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} g(y) = x &\iff \frac{2y+3}{y+2} = x \\ &\iff 2y+3 = x(y+2) \quad (y \neq -2) \\ &\iff 2y - xy = 2x - 3 \\ &\iff y(2-x) = 2x - 3 \\ &\iff y = \frac{2x-3}{2-x} \quad (x \neq 2). \end{aligned}$$



Donc, pour tout $x \in]-\infty; 2[$:

$$g^{-1}(x) = \frac{2x-3}{2-x}.$$

Vérification : $g^{-1}(1) = \frac{2-3}{2-1} = -1$, ce qui est cohérent avec la question 3/b.

✓ Solution Exercice 15

1/ a) **Limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x} = x + 1 - \frac{2}{x}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

b) **Calcul de la dérivée** f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme fonction rationnelle. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2 + x - 2) \times 1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x + 2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}.$$

c) **Tableau de variation** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 + 2 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2/ a) **Fonction réciproque** h est la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

- h est continue sur I (fonction rationnelle définie sur I).
- h est strictement croissante sur I (d'après 1/c).

Donc h réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J = h(I) = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.$$

Par conséquent, h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $J = \mathbb{R}$.

b) **Calcul de $h(2)$ et de $h^{-1}(2)$** On a $2 \in I$ et

$$h(2) = \frac{2^2 + 2 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Donc $h(2) = 2$, ce qui donne $h^{-1}(2) = 2$.



c) **Expression de $h^{-1}(x)$** Soit $x \in J = \mathbb{R}$ et $y \in I =]0; +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} h(y) = x &\iff \frac{y^2 + y - 2}{y} = x \\ &\iff y^2 + y - 2 = xy \quad (y \neq 0) \\ &\iff y^2 + (1 - x)y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré en y est

$$\Delta = (1 - x)^2 + 8 = x^2 - 2x + 9 > 0,$$

donc elle admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x + 9}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}}{2}.$$

Leur produit vaut $y_1 y_2 = -2 < 0$, donc l'une est strictement négative et l'autre strictement positive. Comme $y_1 < y_2$, on a $y_1 < 0 < y_2$. Or $y \in]0; +\infty[$, donc $y = y_2$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h^{-1}(x) = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 9}}{2}.$$

Vérification : $h^{-1}(2) = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$, ce qui est cohérent avec la question 2/b.

John Quincy Adams :

« La patience et la persévérance ont un effet magique devant lequel les difficultés disparaissent. »