



Série Corrigée 1

Limites et Continuité



2 BAC SECO et SGC

S. EL JAAFARI



I- Énoncés des exercices



Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - x)}{x - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x$

11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$



Exercice 2

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$

2) $g(x) = \frac{2x + 3}{2x^2 - x - 15}$

3) $h(x) = \sqrt{(x-2)(x^2 - 4x - 5)}$

4) $i(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{x(x+1)}}$

5) $j(x) = \frac{\sqrt{2-x} + 1}{(x-2)(x+1)}$

6) $l(x) = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{6-x-x^2}}$



Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; $x_0 = 2$

2) $f(x) = \sqrt{3x-1}$; $x_0 = 3$

3) $f(x) = \sin x + \cos x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

4) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$; $x_0 = 1$

$$5) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - 2 & ; x \geq 0 \\ f(x) = -\frac{\sin x}{x} & ; x < 0 \end{cases} ; x_0 = 0 \quad 6) \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} & ; x > 1 \\ f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{x - 1}{4 - 2\sqrt{5} - x} & ; x < 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

$$1) \begin{cases} f(x) = x^2 + x - \frac{x}{x+3} + \cos x \\ I =]-3; +\infty[\end{cases} \quad 2) \begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 5x + 1} & ; x < 1 \\ g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2})} & ; x > 1 \\ g(1) = \frac{4}{3} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & ; x > 2 \\ h(x) = \frac{2x + 11}{3} & ; x \leq 2 \\ I = \mathbb{R} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} k(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ k(2) = \frac{2}{3} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1} & ; x < 1 \\ f(x) = x - 2 & ; x > 1 \\ f(1) = c \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 - (1+a)x + 1}{b(x^2 - 1)} & ; |x| \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que la fonction f soit continue en 1 et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

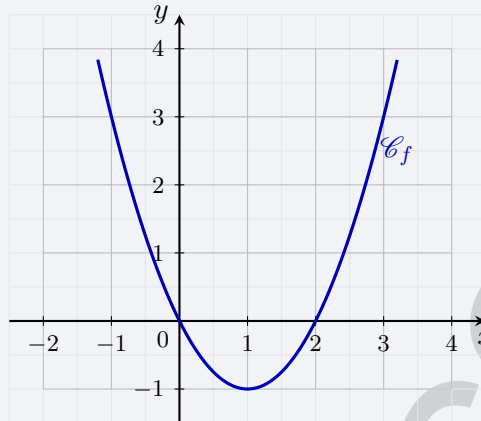


Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Déterminer graphiquement les images par la fonction f des intervalles suivants :

- 1) $I = [-1; 1]$
- 2) $J =]1; 3[$
- 3) $K =]-1; 3]$
- 4) $L =]-\infty; 2]$
- 5) $M =]0; +\infty[$



Exercice 8

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Déterminer les images par la fonction g des intervalles suivants :

- 1) $I = [0; 3[$
- 2) $J = [4; +\infty[$
- 3) $K =]-\infty; 3[$
- 4) $L = [0; 2]$

II- Corrigés des exercices



Solution Exercice 1

1/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On factorise par $(x-2)$ au numérateur et au dénominateur :

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2 + 1) \quad \text{et} \quad x^2 - 2x = x(x-2)$$

Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2+1}{x}$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{5}{2}.$$



2/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On utilise la quantité conjuguée du numérateur :

$$\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

Pour $x \neq 1$: $\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \frac{1}{6}.$$

3/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. On sépare la fraction en deux :

$$\sqrt{x+1} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Quand $x \rightarrow 1^+$, $\sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \rightarrow 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{2}.$$

4/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. En utilisant la double quantité conjuguée :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt{5-x})}{(x-4)(3 + \sqrt{5+x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1 + \sqrt{5-x}}{3 + \sqrt{5+x}} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = -\frac{1}{3}.$$

5/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. En utilisant l'expression conjuguée double :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2x+7}+3)}{2(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}+3}{2(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{3}{4}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x+7}-3} = \frac{3}{4}$$

6/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$:

F.I. $\frac{\infty}{\infty}$. En factorisant par x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = 2$$



7/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x$:

F.I. $\infty - \infty$. Par quantité conjuguée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - x = \frac{1}{2}$$

8/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x$:

F.I. $\infty - \infty$. En factorisant par x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 \right) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 3} - 2x = -\infty$$

9/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x$:

F.I. $\infty - \infty$. Attention, pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Par quantité conjuguée :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2} = -\frac{1}{4}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x = -\frac{1}{4}$$

10/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x$:

En factorisant par x (avec $\sqrt{x^2} = -x$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) = -\infty \times 1 = -\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 3x = -\infty$$

11/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. En factorisant par $(x - 2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x + 1} = -\frac{1}{3}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = -\frac{1}{3}$$

12/ Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$:

F.I. $\frac{0}{0}$. Par quantité conjuguée au numérateur :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sqrt{1 + x + x^2} + 1} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x} = \frac{1}{2}$.

Solution Exercice 2

1/ $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$:

La fonction f est une fonction polynomiale. Elle est donc définie pour tout nombre réel x . Alors :

$$D_f = \mathbb{R}$$

2/ $g(x) = \frac{2x+3}{2x^2-x-15}$:

La fonction g existe si et seulement si son dénominateur est non nul : $2x^2 - x - 15 \neq 0$.

Réolvons l'équation $2x^2 - x - 15 = 0$ à l'aide du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-15) = 1 + 120 = 121 = 11^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+11}{4} = 3$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2}; 3 \right\}$$

3/ $h(x) = \sqrt{(x-2)(x^2-4x-5)}$:

La fonction h est définie si et seulement si l'expression sous la racine est positive ou nulle :

$$(x-2)(x^2-4x-5) \geq 0$$

Trouvons les racines de $x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 16 - 4(1)(-5) = 36 = 6^2$, d'où $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.

Dressons un tableau de signes pour le produit des facteurs :

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$x-2$		-	-	+	+
x^2-4x-5	+	0	-	0	+
Produit	-	0	+	0	+

L'expression est positive ou nulle sur :

$$D_h = [-1; 2] \cup [5; +\infty[$$

4/ $i(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{x(x+1)}}$:

Ici, la fraction sous la racine doit être positive ou nulle, et le dénominateur non nul :

$$\frac{3x-4}{x(x+1)} \geq 0 \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \text{ et } x \neq -1$$

La valeur d'annulation du numérateur est $x = \frac{4}{3}$. Établissons le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x-4$	-	-	-	0	+
$x(x+1)$	+	0	-	0	+
Quotient	-	+	-	0	+



$$D_i =] - 1 ; 0[\cup \left[\frac{4}{3} ; +\infty \right[$$

$$5/ j(x) = \frac{\sqrt{2-x} + 1}{(x-2)(x+1)} :$$

On a deux conditions simultanées :

(a) Pour la racine carrée : $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$.

(b) Pour le dénominateur : $(x-2)(x+1) \neq 0 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -1$.

En combinant ces conditions ($x \in] - \infty ; 2]$ privé de 2 et -1), on obtient :

$$D_j =] - \infty ; -1[\cup] - 1 ; 2[$$

$$6/ l(x) = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{6 - x - x^2}} :$$

La racine étant strictement au dénominateur, le trinôme doit être strictement positif :

$$6 - x - x^2 > 0 \iff -x^2 - x + 6 > 0$$

Calculons le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25 = 5^2$.

Les racines du trinôme sont $x_1 = \frac{1-5}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{1+5}{-2} = -3$.

Comme le coefficient de x^2 est négatif (-1), le trinôme est strictement positif à l'intérieur des racines :

$$D_l =] - 3 ; 2[$$

✓ Solution Exercice 3

Rappel théorique : f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Si la fonction est définie par morceaux, il faut vérifier l'égalité des limites à gauche et à droite : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

1/ Étude en $x_0 = 2$ pour $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$:

f est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 2. Calcul de l'image :

$$f(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 12 - 10 + 1 = 3.$$

$$\text{Calcul de la limite : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 3.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, f est continue en $x_0 = 2$.

2/ Étude en $x_0 = 3$ pour $f(x) = \sqrt{3x-1}$:

f est définie sur $[1/3 ; +\infty[$. Calcul de l'image : $f(3) = \sqrt{3(3)-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Calcul de la limite : } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, f est continue en $x_0 = 3$.

3/ Étude en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pour $f(x) = \sin x + \cos x$:

f est la somme de fonctions trigonométriques continues sur $\mathbb{R}$. Calcul de l'image : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$.

$$\text{Calcul de la limite : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) = 1 + 0 = 1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, f est continue en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.



4/ Étude en $x_0 = 1$ pour la fonction définie par morceaux : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \\ f(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$

On a $f(1) = \frac{1}{4}$. Calculons la limite quand $x \rightarrow 1^+$ (qui correspond à la F.I. $\frac{0}{0}$) en utilisant la quantité conjuguée :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

Pour $x > 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{4}$. Donc f est continue en $x_0 = 1$.

5/ Étude en $x_0 = 0$ pour la fonction définie par morceaux : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1}-2 & ; x \geq 0 \\ f(x) = -\frac{\sin x}{x} & ; x < 0 \end{cases}$

On a $f(0) = \sqrt{0+1}-2 = 1-2 = -1$.

• Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x+1}-2) = -1$.

• Limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -(1) = -1$ (d'après la limite usuelle).

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -1$, alors : f est continue en $x_0 = 0$.

6/ Étude en $x_0 = 1$ pour la fonction définie par morceaux : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} & ; x > 1 \\ f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{x-1}{4-2\sqrt{5-x}} & ; x < 1 \end{cases}$.

On a $f(1) = 2$. Calculons séparément les limites unilatérales :

• À droite ($x \rightarrow 1^+$) : on a une F.I. $\frac{0}{0}$. Remarquons que $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) \times \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}$$

En posant $X = x^2-1$, quand $x \rightarrow 1^+$, $X \rightarrow 0^+$. Par limite usuelle $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin X}{X} = 1$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1+1) \times 1 = 2$.

• À gauche ($x \rightarrow 1^-$) : on a une F.I. $\frac{0}{0}$. Utilisons l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\frac{x-1}{4-2\sqrt{5-x}} = \frac{x-1}{2(2-\sqrt{5-x})} = \frac{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}{2(4-(5-x))} = \frac{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}{2(x-1)}$$

Pour $x < 1$, on simplifie par $(x-1)$: $\frac{x-1}{4-2\sqrt{5-x}} = \frac{2+\sqrt{5-x}}{2}$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2+\sqrt{5-1}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2$, alors f est continue en $x_0 = 1$.

 Solution Exercice 4


Méthode : Pour étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle I , on montre d'abord qu'elle est continue sur les intervalles ouverts par opérations sur les fonctions usuelles, puis on étudie spécifiquement la continuité aux points de raccordement (par les limites à gauche et à droite).

1/ Continuité de f sur $I =]-3; +\infty[$:

L'expression est composée de trois éléments :

- $x \mapsto x^2 + x$ est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \frac{x}{x+3}$ est une fonction rationnelle, définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- $x \mapsto \cos x$ est une fonction trigonométrique continue sur $\mathbb{R}$.

Par somme et différence de fonctions continues sur $] - 3 ; +\infty[$, f est continue sur I .

2/ Continuité de g sur $I = \mathbb{R}$:

- Sur $] - \infty ; 1[$, g est une fonction rationnelle dont le dénominateur $4x^2 - 5x + 1$ s'annule en 1 et $\frac{1}{4}$. Donc g est continue sur $] - \infty ; \frac{1}{4}[$ et sur $]\frac{1}{4}; 1[$. Attention : g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ entier à cause de la valeur interdite en $x = \frac{1}{4}$.
- Sur $]1; +\infty[$, par quotient et différence de fonctions continues (le dénominateur ne s'annulant pas), g est continue.
- **Étude en $x_0 = 1$:** On a $g(1) = \frac{4}{3}$.
À gauche ($x \rightarrow 1^-$) : F.I. " $\frac{0}{0}$ ". On factorise les trinômes par $(x - 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(4x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{4x-1} = \frac{1+3}{4(1)-1} = \frac{4}{3}$$

À droite ($x \rightarrow 1^+$) : F.I. " $\frac{0}{0}$ ". On factorise le numérateur $(x-1)(2x-1)$ et on multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+2})}{3((3x+1) - (2x+2))} = \frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+2})}{3(x-1)}$$

Pour $x > 1$, on simplifie par $(x-1)$: $\frac{(2x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+2})}{3}$.

Sa limite vaut : $\frac{(2(1)-1)(\sqrt{4} + \sqrt{4})}{3} = \frac{1 \times 4}{3} = \frac{4}{3}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \frac{4}{3}$, alors g est continue en 1.

Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$.

3/ Continuité de h sur $I = \mathbb{R}$:

- Sur $]2; +\infty[$, h est continue comme fonction rationnelle (dénominateur non nul).
- Sur $] - \infty ; 2[$, h est continue comme fonction affine.
- **Étude au point de raccordement $x_0 = 2$:**

À gauche ($x \leq 2$) : $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = h(2) = \frac{2(2) + 11}{3} = \frac{15}{3} = 5$.

À droite ($x \rightarrow 2^+$) : F.I. " $\frac{0}{0}$ ". On factorise le numérateur : $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) = 2+3 = 5$$



Puisque $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = h(2) = 5$, h est continue sur $\mathbb{R}$.

4/ Continuité de k sur $I = \mathbb{R}$:

- Sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, la fonction k est continue par quotient et somme de fonctions usuelles continues.
- **Étude en $x_0 = 2$:** On a $k(2) = \frac{2}{3}$.
Calculons la limite de k en 2 (F.I. " $\frac{0}{0}$ ") à l'aide de la quantité conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 5) - 9}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{2 + 2}{\sqrt{4 + 5} + 3} = \frac{4}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = k(2) = \frac{2}{3}$, alors k est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ Solution Exercice 5

Méthode : Pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = c$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + bx - b - 1} & ; x < 1 \\ f(x) = x - 2 & ; x > 1 \\ f(1) = c \end{cases}$$

○ Détermination de c (Limite à droite) :

Calculons la limite à droite de f en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

Par continuité, on doit avoir $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, d'où :

$$c = -1$$

○ Détermination de a (Condition nécessaire pour la limite à gauche) :

Étudions le dénominateur de la première expression lorsque $x \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + bx - b - 1) = 1^2 + b(1) - b - 1 = 0$$

Le dénominateur tend vers 0. Pour que la limite de la fraction soit finie (égale à -1), il est nécessaire que le numérateur tende également vers 0 lorsque $x \rightarrow 1^-$ (pour obtenir une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ " susceptible d'être levée).

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - ax + 3) = 1 - a + 3 = 4 - a$$



On impose donc $4 - a = 0$, ce qui donne :

$$a = 4$$

○ **Détermination de b (Calcul de la limite à gauche) :**

En remplaçant a par 4, factorisons le numérateur et le dénominateur par $(x - 1)$:

– Numérateur : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

– Dénominateur : $x^2 + bx - b - 1 = (x^2 - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(x + 1) + b(x - 1) = (x - 1)(x + 1 + b)$

Pour $x < 1$, l'expression de $f(x)$ devient après simplification :

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)(x + 1 + b)} = \frac{x - 3}{x + 1 + b}$$

Calculons maintenant sa limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1 - 3}{1 + 1 + b} = \frac{-2}{2 + b}$$

Pour assurer la continuité, cette limite doit être égale à $c = -1$:

$$\frac{-2}{2 + b} = -1 \iff -2 = -1(2 + b) \iff -2 = -2 - b \iff b = 0$$

Conclusion : La fonction f est continue en $x_0 = 1$ si et seulement si :

$$a = 4 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = -1$$

✓ **Solution Exercice 6**

Méthode : Pour déterminer les réels a et b , nous allons exploiter les deux conditions de l'énoncé de manière indépendante pour former un système d'équations.

a) **Exploitation de la limite en $+\infty$:**

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{bx^2} = \frac{a}{b}$$

L'énoncé impose que cette limite soit égale à $\frac{1}{2}$, on obtient donc notre première relation :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \iff b = 2a \quad (\text{Équation 1})$$

b) **Exploitation de la continuité en 1 :**

Pour que f soit continue en 1, il faut que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{6}$.

Calculons cette limite (qui se présente initialement sous la forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "). Factorisons le numérateur par $(x - 1)$:

$$ax^2 - (1 + a)x + 1 = ax^2 - x - ax + 1 = ax(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(ax - 1)$$



Le dénominateur se factorise par l'identité remarquable : $b(x^2 - 1) = b(x - 1)(x + 1)$.
 Pour $|x| \neq 1$, l'expression de $f(x)$ se simplifie ainsi :

$$f(x) = \frac{(x-1)(ax-1)}{b(x-1)(x+1)} = \frac{ax-1}{b(x+1)}$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{a(1)-1}{b(1+1)} = \frac{a-1}{2b}$$

On impose que cette limite soit égale à $f(1) = \frac{1}{6}$:

$$\frac{a-1}{2b} = \frac{1}{6} \iff 6(a-1) = 2b \iff 3(a-1) = b \iff \mathbf{b = 3a - 3} \quad (\text{Équation 2})$$

c) Résolution du système :

En égalisant l'Équation 1 et l'Équation 2, on obtient :

$$2a = 3a - 3 \iff 3a - 2a = 3 \iff \mathbf{a = 3}$$

En remplaçant $a = 3$ dans l'Équation 1 ($b = 2a$) :

$$b = 2 \times 3 \iff \mathbf{b = 6}$$

Conclusion : La fonction f est continue en 1 et possède la limite attendue en $+\infty$ si et seulement si :

$$\mathbf{a = 3 \quad \text{et} \quad b = 6}$$

✓ Solution Exercice 7

Méthode : Trouver l'image d'un intervalle par une courbe revient à repérer toutes les valeurs de l'axe des ordonnées (y) atteintes par les points de la courbe dont les abscisses (x) appartiennent à cet intervalle. On prend garde aux extremums locaux qui peuvent clore un intervalle même si les bornes de départ sont ouvertes.

• **Image de $I = [-1; 1]$:**

Lorsque x varie de -1 à 1 , la fonction f décroît continûment de $f(-1) = 3$ jusqu'au minimum de la courbe atteint au sommet $f(1) = -1$. Toutes les valeurs de l'ordonnée sont balayées entre -1 et 3 (bornes incluses).

$$\mathbf{f(I) = [-1; 3]}$$

• **Image de $J =]1; 3[$:**

Sur l'intervalle $]1; 3[$, la fonction f est strictement croissante. Les ordonnées correspondantes augmentent de $f(1) = -1$ (exclu car $x > 1$) jusqu'à $f(3) = 3$ (exclu car $x < 3$).

$$\mathbf{f(J) =] -1; 3[}$$

• **Image de $K =]-1; 3]$:**

Cet intervalle contient la valeur $x = 1$, où la fonction atteint son minimum absolu. L'ordonnée minimale de l'image est donc -1 (qui est inclus, car $1 \in K$).

Pour les valeurs maximales, aux bornes on a $f(-1) = 3$ (exclu) et $f(3) = 3$ (inclus). Le maximum atteint est donc 3 .

$$\mathbf{f(K) = [-1; 3]}$$



- **Image de $L =] - \infty ; 2]$:**

L'intervalle L contient également le sommet de la parabole en $x = 1$, la valeur minimale atteinte sur l'axe des ordonnées est donc -1 .

Lorsque x tend vers $-\infty$, la courbe remonte de manière illimitée vers $+\infty$.

$$f(L) = [-1 ; +\infty[$$

- **Image de $M =]0 ; +\infty[$:**

Ici encore, la valeur $x = 1$ appartient à l'intervalle, fixant la borne minimale de l'image à -1 (inclus).

Lorsque x grandit vers $+\infty$, les ordonnées s'élèvent vers $+\infty$.

$$f(M) = [-1 ; +\infty[$$

✓ Solution Exercice 8

Étude préliminaire : La fonction g est une fonction homographique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Sa dérivée est $g'(x) = \frac{2(x-3) - 1(2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$. Comme $g'(x) < 0$, la fonction g est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] - \infty ; 3[$ et $]3 ; +\infty[$. Nous utiliserons cette monotonie pour déterminer les images.

- **Image de $I = [0 ; 3[$:**

La fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 3[$.

– À la borne inférieure : $g(0) = \frac{2(0)+1}{0-3} = -\frac{1}{3}$.

– À la borne supérieure : $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x+1) = 7$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$.

Puisque la fonction est décroissante, l'ordre des bornes s'inverse :

$$g(I) =]-\infty ; -\frac{1}{3}]$$

- **Image de $J = [4 ; +\infty[$:**

La fonction g est strictement décroissante sur $[4 ; +\infty[$.

– À la borne inférieure : $g(4) = \frac{2(4)+1}{4-3} = \frac{9}{1} = 9$.

– À la borne supérieure (termes de plus haut degré) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

En inversant les bornes à cause de la décroissance, on obtient :

$$g(J) =]2 ; 9]$$

- **Image de $K =] - \infty ; 3[$:**

La fonction g est strictement décroissante sur $] - \infty ; 3[$.

– À la borne inférieure : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$.

– À la borne supérieure : $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$.

L'ordre inversé donne :

$$g(K) =] - \infty ; 2[$$



- **Image de $L = [0 ; 2]$:**

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[0 ; 2]$. Il suffit de calculer les images des deux extrémités de l'intervalle :

- $g(0) = -\frac{1}{3}$

- $g(2) = \frac{2(2)+1}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$

Par décroissance, on intervertit l'ordre pour écrire l'intervalle du plus petit au plus grand élément :

$$g(L) = \left[-5 ; -\frac{1}{3} \right]$$

