



Série 1

Produit scalaire dans l'espace

1 BAC SM

S. EL JAAFARI



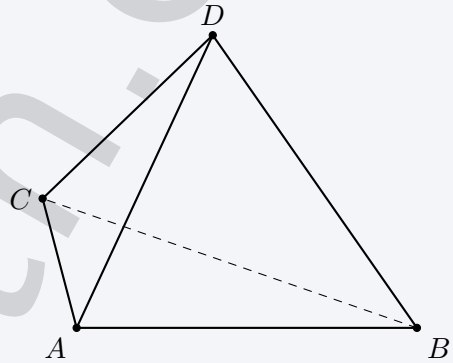
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Exercice 1

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a .

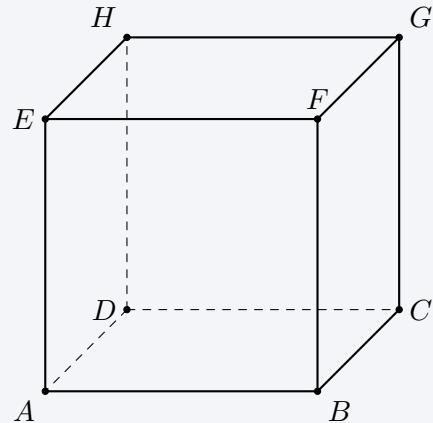
1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
3. Quelle conclusion peut-on tirer?



Exercice 2

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a .

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CE}$.
2. En déduire que les droites (AH) et (CE) sont orthogonales.
3. Que peut-on dire sur les droites (CH) et (AG) ?



Exercice 3

Soient $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(1, 2, -2)$, $\vec{w}(-1, 0, 4)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$.
3. Déterminer les mesures des angles entre $(\vec{u}, \vec{v})$; $(\vec{u}, \vec{w})$ et $(\vec{v}, \vec{w})$.
4. Déterminer les valeurs de m pour que $\vec{u}$ et $\vec{U}(1, m, 1)$ soient orthogonaux.

**Exercice 4**

1/ Étudier l'orthogonalité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

- a) $\vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{v}(1, 5, 1)$.
- b) $\vec{u}(0, 1, 3)$ et $\vec{v}(1, 0, -1)$.
- c) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v}(1, 5, -7)$.
- d) $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

2/ Déterminer les mesures des angles du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

- a) $A(1, 1, -1)$, $B(2, 3, 2)$ et $C(0, -1, -2)$.
- b) $A(4, 1, 3)$, $B(6, 4, 2)$ et $C(5, 0, 2)$.
- c) $A(2, 0, 2)$, $B(2, -2, 1)$ et $C(7, -1, -1)$.
- d) $A(0, 4, 1)$, $B(1, 6, 7)$ et $C(-1, 3, 2)$.

**Exercice 5**

Soit $SABC$ un tétraèdre.

1/ Montrer que pour tout point M de l'espace : $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$.

2/ Montrer que si $(AB) \perp (CS)$ et $(AC) \perp (BS)$, alors $(BC) \perp (AS)$.

3/ Montrer que $\vec{AS} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BS}$.

4/ a) Dédurre que $AS^2 + BC^2 = AC^2 + BS^2 + 2\vec{SC} \cdot \vec{AB}$.

b) Montrer que $(AB) \perp (CS) \Leftrightarrow AS^2 + BC^2 = AC^2 + BS^2$.

**Exercice 6**

1/ Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$, dans chacun des cas suivants :

- a) $A(-1, 1, 2)$ et $\vec{n}(3, -1, 2)$.
- b) $A(3, 0, -1)$ et $\vec{n}(4, -2, 3)$.
- c) $A(1, 1, 1)$ et $\vec{n}(5, -3, 0)$.
- d) $A(-2, 1, -3)$ et $\vec{n}(-4, 0, 5)$.

2/ Calculer la distance du point B au plan $\mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants :

- a) $B(2, -1, -1)$ et $(\mathcal{P}) : 2x - y + z - 5 = 0$.
- b) $B(1, 1, 17)$ et $(\mathcal{P}) : 3x - 2y - 1 = 0$.
- c) $B(1, 1, 2)$ et $(\mathcal{P}) : x + 2y - 3z = 0$.
- d) $B(-10, 1, 1)$ et $(\mathcal{P}) : 3y - z - 1 = 0$.

**Exercice 7**

Soit $A(1, -2, 1)$ un point de l'espace et $(\mathcal{P}) : 2x - y + 2z + 1 = 0$ un plan de l'espace.

- 1/ Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ du plan $(\mathcal{P})$.
- 2/ Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$.
- 3/ Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $(\mathcal{P})$.

**Exercice 8**

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et le plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas :

1. $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : x + y - z + 4 = 0.$
2. $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = +2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : 2x - 3y + z + 1 = 0.$
3. $(\Delta) : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : 3x + 2y - 5z - 4 = 0.$
4. $(\Delta) : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) : 3x + 2y - 4 = 0.$

**Exercice 9**

- 1/ Déterminer l'équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ dans chacun des cas suivants :
 - a) $(\mathcal{S})$ a pour centre le point $\Omega(-1, 1, 2)$ et pour rayon $R = \sqrt{5}$.
 - b) $(\mathcal{S})$ a pour centre le point $\Omega(1, -1, 1)$ et passe par le point $A(1, 0, 5)$.
 - c) $(\mathcal{S})$ a pour diamètre le segment $[AB]$ tel que $A(2, -1, 1)$ et $B(-1, 0, 3)$.
- 2/ Déterminer l'ensemble $(\mathcal{S})$ des points $M(x, y, z)$ de l'espace dans chacun des cas suivants :
 - a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z = 0.$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 6 = 0.$
 - c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z + 15 = 0.$

**Exercice 10**

- 1/ Soit $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$ la sphère et le plan définis par : $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ et $(\mathcal{P}) : x + \sqrt{3}y - 5 = 0.$

- a) Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ est tangent à la sphère $(\mathcal{S})$.
 b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{P})$.

2/ Déterminer l'intersection de la sphère $(\mathcal{S})$ et le plan $(\mathcal{P})$ dans chacun des cas suivants :

- a) $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 15 = 0$ et $(\mathcal{P}) : x + y - z - 2 = 0$.
 b) $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ et $(\mathcal{P}) : x - 2y + z + 3 = 0$.
 c) $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2y - 15 = 0$ et $(\mathcal{P}) : 3x + 4z - 9 = 0$.
 d) $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 3 = 0$ et $(\mathcal{P}) : 2x + 3z - 4 = 0$.



Exercice 11

- 1/ On considère la sphère $(\mathcal{S})$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$.
 a) Vérifier que le point $A(-1, 1, 0)$ appartient à $(\mathcal{S})$.
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ tangent à $(\mathcal{S})$ au point A .
 2/ Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega(2, 3, 1)$ et tangente au plan $(\mathcal{P}) : 2x - 2y + z - 5 = 0$.
 3/ Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ qui coupe la sphère $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ selon le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.



Exercice 12

- 1/ Soit $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ la sphère de centre Ω et de rayon R , et soit $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ une droite de l'espace.
 a) Déterminer le rayon R et les coordonnées de Ω .
 b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère $(\mathcal{S})$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.
 2/ Montrer que la droite $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 \\ z = 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est tangente à la sphère la sphère $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.
 3/ Étudier l'intersection de la droite $(\Delta) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et la sphère $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 10 = 0$.