



Série Corrigée 2

Limites et Continuité

2 BAC SECO et SGC

S. EL JAAFARI



I– Énoncés des exercices



Exercice 1

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 + x - 3$$

1/ Montrer que l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$.

2/ Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$.



Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$; $I = [0; 1]$

2) $f(x) = 2 \sin x - x$; $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

3) $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$; $I = [1; 4]$



Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I :

1) $f(x) = x^3 + 2x - 2$; $I = [0; 1]$

2) $f(x) = x^4 + 2x - 5$; $I = [1; +\infty[$

3) $f(x) = 1 + 2 \sin x + 3x$; $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$



Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

- 1/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
- 2/ Montrer que : $1 < \alpha < 2$.
- 3/ Donner le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .



Exercice 5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

- 1/ Déterminer D_f .
- 2/
 - a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$.
 - b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-2; +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Calculer $g(-1)$ et en déduire $g^{-1}(1)$.
 - c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.



Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

- 1/
 - a) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathbb{R}^*$.
 - b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$.
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 2/ Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
 - a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Calculer $h(2)$, puis en déduire $h^{-1}(2)$.
 - c) Calculer $h^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.



Exercice 7



Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$$

1/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

2/ Montrer que la fonction h est continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

3/ a/ Étudier la dérivabilité de la fonction h à droite de $x_0 = 1$; et interpréter graphiquement ce résultat.

b/ Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[; h'(x) = \frac{2x(x^2 - 2)}{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$

c/ En déduire que h est strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; \sqrt{2}]$; puis dresser son tableau de variation.

4/ Soit g la restriction de h sur l'intervalle $I = [\sqrt{2}; +\infty[$

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b/ Montrer que : $\forall x \in I ; g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$

c/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J .

II– Corrigés des exercices



Solution Exercice 1

Étude préliminaire de la fonction h :

La fonction h est une fonction polynomiale, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa dérivée est : $h'(x) = 3x^2 + 1$.

Puisque $x^2 \geq 0$, on a $3x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x . La fonction h est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
h	$-\infty$	$+\infty$

1/ Montrons que $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans $]1; 2[$:

- h est continue sur l'intervalle $[1; 2]$.
- Calculons les images des bornes :

$$h(1) = 1^3 + 1 - 3 = -1$$

$$h(2) = 2^3 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$$

- Le nombre 4 est bien compris entre $h(1)$ et $h(2)$ (on a $-1 < 4 < 7$).



D'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)**, l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1; 2[$.

(Note : Comme h est strictement monotone, cette solution est même unique).

2/ **Justifions que $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$:**

- h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Les limites aux infinis sont : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

La fonction h réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ (car $-\infty < 0 < +\infty$), d'après le corollaire du TVI (théorème de la bijection), **l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.**

Encadrement de α : Calculons la valeur de la fonction en $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$:

- $h(1) = -1$ (donc $h(1) < 0$)
- $h\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} - 3 = \frac{27}{8} + \frac{12}{8} - \frac{24}{8} = \frac{15}{8}$ (donc $h\left(\frac{3}{2}\right) > 0$)

Comme $h(1) < 0 < h\left(\frac{3}{2}\right)$ et que la fonction est strictement croissante, l'unique valeur α pour laquelle $h(\alpha) = 0$ se situe nécessairement entre ces deux bornes. On en déduit que :

$$\alpha \in \left] 1; \frac{3}{2} \right[$$

✓ Solution Exercice 2

Rappel : D'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a; b]$, et si 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire que $f(a) \times f(b) \leq 0$), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

1/ **Étude de $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$ sur $I = [0; 1]$:**

- f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Calculons les images des extrémités de l'intervalle :

$$f(0) = 0^4 + 0^2 + 2(0) - 1 = -1 \quad (\text{donc } f(0) < 0)$$

$$f(1) = 1^4 + 1^2 + 2(1) - 1 = 1 + 1 + 2 - 1 = 3 \quad (\text{donc } f(1) > 0)$$

Comme f est continue et que $f(0) \times f(1) < 0$ (le signe change), d'après le **TVI**, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

2/ **Étude de $f(x) = 2 \sin x - x$ sur $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$:**

- f est la différence de fonctions usuelles ($x \mapsto 2 \sin x$ et $x \mapsto x$) continues sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
- Calculons les images des extrémités de l'intervalle :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$



Or, $\sqrt{3} \approx 1,732$ et $\frac{\pi}{3} \approx 1,047$, donc $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$.

$$f(\pi) = 2 \sin(\pi) - \pi = 2(0) - \pi = -\pi \quad (\text{donc } f(\pi) < 0)$$

La fonction f est continue et 0 est compris entre $f(\pi)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ car $f(\pi) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

3/ Étude de $f(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$ sur $I = [1; 4]$:

- $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto -5\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Par somme, la fonction f est continue sur l'intervalle $[1; 4]$.
- Calculons les images des extrémités de l'intervalle :

$$f(1) = 1^2 - 5\sqrt{1} + 1 = 1 - 5 + 1 = -3 \quad (\text{donc } f(1) < 0)$$

$$f(4) = 4^2 - 5\sqrt{4} + 1 = 16 - 5(2) + 1 = 16 - 10 + 1 = 7 \quad (\text{donc } f(4) > 0)$$

La fonction f est continue sur $[1; 4]$ et change de signe aux bornes ($f(1) < 0 < f(4)$). D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 4]$.

✓ Solution Exercice 3

Rappel : Pour démontrer qu'une équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution sur un intervalle I , on utilise le théorème de la bijection (corollaire du TVI). Il faut valider trois conditions : la continuité de f sur I , la stricte monotonie de f sur I (démontrée par le signe de la dérivée), et le fait que 0 soit compris entre les bornes de l'intervalle image $f(I)$.

1/ Étude de $f(x) = x^3 + 2x - 2$ sur $I = [0; 1]$:

- **Continuité :** f est une fonction polynomiale, donc continue sur $[0; 1]$.
- **Monotonie :** Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 3x^2 + 2$. Comme $x^2 \geq 0$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f est donc **strictement croissante** sur $[0; 1]$.
- **Valeurs aux bornes :**

$$f(0) = 0^3 + 2(0) - 2 = -2 \quad (\text{donc } f(0) < 0)$$

$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 2 = 1 \quad (\text{donc } f(1) > 0)$$

Puisque f est continue, strictement croissante et change de signe sur $[0; 1]$ (car $-2 < 0 < 1$), d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[0; 1]$.

2/ Étude de $f(x) = x^4 + 2x - 5$ sur $I = [1; +\infty[$:

- **Continuité :** f est une fonction polynomiale, donc continue sur $[1; +\infty[$.
- **Monotonie :** Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = 4x^3 + 2$. Puisque $x \geq 1$, $x^3 > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est **strictement croissante** sur $[1; +\infty[$.
- **Valeurs aux bornes :**

$$f(1) = 1^4 + 2(1) - 5 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$



La fonction f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers l'intervalle image $f(I) = [-2; +\infty[$. Comme $0 \in [-2; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[1; +\infty[$.

3/ **Étude de $f(x) = 1 + 2 \sin x + 3x$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$:**

- **Continuité :** f est continue comme somme de fonctions usuelles continues ($\sin x$ et fonction affine).
- **Monotonie :** Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$, $f'(x) = 2 \cos x + 3$.
On sait que pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$. En multipliant par 2 et en ajoutant 3 :

$$-2 \leq 2 \cos x \leq 2 \implies 1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5$$

Ainsi, $f'(x) \geq 1 > 0$ sur I . La fonction f est donc **strictement croissante** sur $\left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

- **Valeurs aux bornes :**

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 1 - 1 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad (< 0)$$

$$f(\pi) = 1 + 2 \sin(\pi) + 3\pi = 1 + 2(0) + 3\pi = 1 + 3\pi \quad (> 0)$$

La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe aux extrémités de l'intervalle (car $-\frac{\pi}{2} < 0 < 1 + 3\pi$). D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

✓ Solution Exercice 4

1/ **Montrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$:**

Étudions d'abord les variations de la fonction g . Elle est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$.

Les racines de la dérivée sont $x = 0$ et $x = 1$. Le signe de $g'(x)$ est positif à l'extérieur des racines (car le coefficient de x^2 est $6 > 0$).

Calculons les valeurs remarquables et les limites aux infinis :

- $g(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 - 1 = -1$
- $g(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

Dressons le tableau de variations complet :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$		



D'après le tableau de variations :

- Sur $] -\infty ; 1]$, le maximum de la fonction est -1 . L'expression $g(x)$ y est strictement négative, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
- Sur $[1 ; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur l'intervalle image $[-2 ; +\infty[$. Comme $0 \in [-2 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $\mathbb{R}$ (et on a $\alpha > 1$).

2/ **Montrons que** $1 < \alpha < 2$:

On sait déjà que $\alpha \in [1 ; +\infty[$, donc $1 < \alpha$. Calculons l'image de la borne supérieure $x = 2$:

$$g(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 1 = 2(8) - 3(4) - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$$

On constate que $g(1) = -2 < 0$ et $g(2) = 3 > 0$. Comme la fonction g est strictement croissante sur $[1 ; 2]$, l'unique valeur α s'annulant en 0 est nécessairement comprise entre les antécédents de ces deux bornes. On en déduit bien que :

$$1 < \alpha < 2$$

3/ **Signe de** $g(x)$ **selon les valeurs de** x :

La fonction g s'annule uniquement en α . Comme elle est strictement croissante sur l'intervalle qui contient α , elle passe des valeurs négatives aux valeurs positives. Nous pouvons résumer le signe de $g(x)$ dans un tableau de signes tkz-tab :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

C'est-à-dire :

- Pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$: $g(x) < 0$
- Pour $x = \alpha$: $g(\alpha) = 0$
- Pour tout $x \in]\alpha ; +\infty[$: $g(x) > 0$

✓ **Solution Exercice 5**

1/ **Détermination de** D_f f est une fonction rationnelle; elle est définie si et seulement si $x + 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$. Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[.$$

2/ a) **Calcul de la dérivée** f est dérivable sur D_f comme fonction rationnelle. Pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - 1 \times (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

b) **Tableau de variation** Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; +\infty[$.

**Limites :**

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2.$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x + 3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 2) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} (2x + 3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	2	$+\infty$ $-\infty$	2

3/ a) **Fonction réciproque** g est la restriction de f à $I =]-2; +\infty[.$

- g est continue sur I (fonction rationnelle définie sur I).
- g est strictement croissante sur I (d'après 2/b).

Donc g réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J = g(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; 2[.$$

Par conséquent, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J =]-\infty; 2[.$

b) **Calcul de $g(-1)$ et de $g^{-1}(1)$** On a $-1 \in I$ et

$$g(-1) = \frac{2 \times (-1) + 3}{-1 + 2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc $g(-1) = 1$, ce qui donne $g^{-1}(1) = -1.$

c) **Expression de $g^{-1}(x)$** Soit $x \in J =]-\infty; 2[$ et $y \in I =]-2; +\infty[.$ Alors

$$\begin{aligned}
 g(y) = x &\iff \frac{2y + 3}{y + 2} = x \\
 &\iff 2y + 3 = x(y + 2) \quad (y \neq -2) \\
 &\iff 2y - xy = 2x - 3 \\
 &\iff y(2 - x) = 2x - 3 \\
 &\iff y = \frac{2x - 3}{2 - x} \quad (x \neq 2).
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-\infty; 2[:$

$$g^{-1}(x) = \frac{2x - 3}{2 - x}.$$

Vérification : $g^{-1}(1) = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1$, ce qui est cohérent avec la question 3/b.

Solution Exercice 6

1/ a) **Limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x} = x + 1 - \frac{2}{x}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

b) **Calcul de la dérivée** f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme fonction rationnelle. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2 + x - 2) \times 1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x + 2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}.$$

c) **Tableau de variation** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 + 2 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2/ a) **Fonction réciproque** h est la restriction de f à $I =]0; +\infty[$.

- h est continue sur I (fonction rationnelle définie sur I).
- h est strictement croissante sur I (d'après 1/c).

Donc h réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J = h(I) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[=] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}.$$

Par conséquent, h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $J = \mathbb{R}$.

b) **Calcul de $h(2)$ et de $h^{-1}(2)$** On a $2 \in I$ et

$$h(2) = \frac{2^2 + 2 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Donc $h(2) = 2$, ce qui donne $h^{-1}(2) = 2$.

c) **Expression de $h^{-1}(x)$** Soit $x \in J = \mathbb{R}$ et $y \in I =]0; +\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} h(y) = x &\iff \frac{y^2 + y - 2}{y} = x \\ &\iff y^2 + y - 2 = xy \quad (y \neq 0) \\ &\iff y^2 + (1-x)y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré en y est

$$\Delta = (1-x)^2 + 8 = x^2 - 2x + 9 > 0,$$



donc elle admet deux solutions :

$$y_1 = \frac{x-1-\sqrt{x^2-2x+9}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{x-1+\sqrt{x^2-2x+9}}{2}$$

Leur produit vaut $y_1 y_2 = -2 < 0$, donc l'une est strictement négative et l'autre strictement positive. Comme $y_1 < y_2$, on a $y_1 < 0 < y_2$. Or $y \in]0; +\infty[$, donc $y = y_2$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h^{-1}(x) = \frac{x-1+\sqrt{x^2-2x+9}}{2}.$$

Vérification : $h^{-1}(2) = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$, ce qui est cohérent avec la question 2/b.

✓ Solution Exercice 7

Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$.

1/ **Montrons que** $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$:

Pour lever l'indétermination de la forme " $+\infty - \infty$ ", on peut factoriser par x^2 ou utiliser l'expression conjuguée. Récrivons $h(x)$ en factorisant par x^2 pour $x > 1$:

$$h(x) = x^2 \left(1 - \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right) = x^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^4}} \right) = x^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}} \right)$$

Or, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}} \right) = 1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

2/ **Montrons que la fonction h est continue sur $[1; +\infty[$:**

- La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est un polynôme, donc continue sur $[1; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $x^2 - 1 \geq 0$.
- Par composition avec la fonction racine carrée (continue sur $[0; +\infty[$), la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur $[1; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est également continue sur $[1; +\infty[$.

Par somme et produit de fonctions continues, h est continue sur $[1; +\infty[$.

3/ a) **Étudions la dérivabilité de h à droite de $x_0 = 1$:**

Calculons la limite du taux d'accroissement en 1 à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$



On a $h(1) = 1^2 - 2\sqrt{1^2 - 1} = 1$. Donc :

$$\frac{h(x) - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$$

Comme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, le premier terme devient :

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

Pour le second terme, puisque $x > 1$, on a $x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$:

$$\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{2\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{\sqrt{(x - 1)^2}} = 2\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left((x + 1) - 2\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \right)$$

Quand $x \rightarrow 1^+$, $(x + 1) \rightarrow 2$ et $\frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{2}{0^+} = +\infty$, d'où $2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow +\infty$.

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = -\infty$$

La fonction h n'est donc **pas dérivable à droite** en $x_0 = 1$.

Interprétation graphique : La courbe représentative de h admet au point d'abscisse 1 une **demi-tangente verticale** dirigée vers le bas (car la limite est $-\infty$).

b) Montrons que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{2x(x^2 - 2)}{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$:

Pour $x > 1$, la fonction h est dérivable et :

$$h'(x) = 2x - 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 2x - \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = 2x \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $(\sqrt{x^2 - 1} + 1)$:

$$h'(x) = \frac{2x(\sqrt{x^2 - 1} - 1)(\sqrt{x^2 - 1} + 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{x^2 - 1} + 1)} = \frac{2x((x^2 - 1) - 1^2)}{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

D'où le résultat demandé :

$$h'(x) = \frac{2x(x^2 - 2)}{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

c) **Variations de h et tableau de variation :**

Sur $]1; +\infty[$, les facteurs $2x$, $\sqrt{x^2 - 1}$ et $(\sqrt{x^2 - 1} + 1)$ sont strictement positifs. Le signe de $h'(x)$ dépend donc uniquement du signe de $x^2 - 2$.

- $x^2 - 2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$ (car $x \geq 1$).
- Sur $]1; \sqrt{2}[$, $x^2 - 2 < 0 \implies h'(x) < 0$, donc h est **strictement décroissante** sur $]1; \sqrt{2}[$.
- Sur $]\sqrt{2}; +\infty[$, $x^2 - 2 > 0 \implies h'(x) > 0$, donc h est **strictement croissante** sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.



Calculons la valeur remarquable : $h(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 2 - 2\sqrt{1} = 0$.
Le tableau de variation de h se résume ainsi :

x	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	1				$+\infty$

4/ Soit g la restriction de h sur $I = [\sqrt{2}; +\infty[$.

a) **Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} :**

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [\sqrt{2}; +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de I vers l'intervalle $J = g(I)$.

$$J = [g(\sqrt{2}); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[= [0; +\infty[$$

Donc, g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [0; +\infty[$.

b) **Montrons que $\forall x \in I$, $g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$:**

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2 &= (\sqrt{x^2 - 1})^2 - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1 \\ &= (x^2 - 1) - 2\sqrt{x^2 - 1} + 1 \\ &= x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de $g(x)$. Donc on a bien $\forall x \in I$, $g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$.

c) **Déterminons l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:**

Soit $x \in [0; +\infty[$ et $y \in [\sqrt{2}; +\infty[$. Résolvons l'équation $g(y) = x$:

$$(\sqrt{y^2 - 1} - 1)^2 = x \iff \sqrt{y^2 - 1} - 1 = \sqrt{x} \quad \text{ou} \quad \sqrt{y^2 - 1} - 1 = -\sqrt{x}$$

Puisque $y \geq \sqrt{2}$, on a $y^2 \geq 2 \implies y^2 - 1 \geq 1 \implies \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$, donc $\sqrt{y^2 - 1} - 1 \geq 0$.
Comme $\sqrt{x} \geq 0$, seule la première égalité est valide :

$$\sqrt{y^2 - 1} - 1 = \sqrt{x} \iff \sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{x} + 1$$

En élevant au carré (les deux membres étant positifs) :

$$y^2 - 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \iff y^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 + 1$$

Comme $y \geq \sqrt{2} > 0$, on prend la racine carrée positive :

$$y = \sqrt{(\sqrt{x} + 1)^2 + 1}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$g^{-1}(x) = \sqrt{(\sqrt{x} + 1)^2 + 1} = \sqrt{x + 2\sqrt{x} + 2}$$