



## Série 3

### Étude des fonctions

2 BAC SECO et SGC

S. EL JAAFARI



#### Exercice 1

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1/
  - a. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - b. Déterminer les limites de  $f$  à droite et à gauche en 1. En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe  $(C_f)$ .
  - c. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$ .
  - d. En déduire que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- 2/
  - a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , la fonction dérivée  $f'$  est égale à :

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

- b. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
  - c. Dresser le tableau de variations complet de  $f$  (incluant les limites).
- 3/
  - a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées.
  - b. Tracer l'asymptote verticale, l'asymptote oblique  $(D)$ , puis la courbe  $(C_f)$ .



#### Exercice 2

1/ Quel est le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \frac{x + 5}{3x - 6}$  ?

- ☐  $\mathbb{R}$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
- ☐  $]2, +\infty[$
- ☐  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2/ Quel est le domaine de définition de la fonction  $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$  ?

- ☐  $]0, +\infty[$



- ☐  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$
- ☐  $[0, +\infty[$
- ☐  $] -\infty, 4[$

3/ Quelle est l'équation de l'asymptote horizontale de la fonction  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$  en  $+\infty$  ?

- ☐  $y = 2$
- ☐  $y = 1$
- ☐  $x = 1$
- ☐ Pas d'asymptote horizontale

4/ Quelle est l'équation de l'asymptote verticale de la fonction  $f(x) = \frac{5}{2x-4}$  ?

- ☐  $x = -2$
- ☐  $y = 0$
- ☐  $x = 2$
- ☐  $x = \frac{5}{2}$

5/ Quelle est la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x) = 4x^3\sqrt{x} + 2$  ?

- ☐  $f'(x) = 6x\sqrt{x}$
- ☐  $f'(x) = 14x^2\sqrt{x} + 2$
- ☐  $f'(x) = 14x^2\sqrt{x}$
- ☐  $f'(x) = 12x^2\sqrt{x} + 2$

6/ Soit  $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est sa fonction dérivée  $f'(x)$  ?

- ☐  $f'(x) = \frac{2x+3}{2x+1}$
- ☐  $f'(x) = \frac{-2x^2+4x+4}{(x^2+x+1)^2}$
- ☐  $f'(x) = \frac{2x^2-4x+4}{(x^2+x+1)^2}$
- ☐  $f'(x) = \frac{-2x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

7/ Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée  $f'$  est négative sur  $] -\infty, 2[$  et positive sur  $]2, +\infty[$ , avec  $f(2) = -3$ . Que représente  $f(2)$  pour la fonction  $f$  ?

- ☐ Un minimum global (et local)
- ☐ Un maximum global
- ☐ Un point d'inflexion
- ☐ Une valeur nulle

8/ La fonction de coût total d'une entreprise est  $C(q) = 0.5q^2 + 20q + 1000$ . Quelle est l'expression du coût marginal  $Cm(q)$  ?



- ☐  $Cm(q) = 0.5q^2 + 20q$
- ☐  $Cm(q) = q^2 + 20$
- ☐  $Cm(q) = q + 20$
- ☐  $Cm(q) = 0.5q + 20$

9/ Si la fonction de recette totale d'une entreprise est  $R(q) = 150q$ , quelle est l'expression de la recette marginale  $Rm(q)$  ?

- ☐  $Rm(q) = 150q^2$
- ☐  $Rm(q) = 150$
- ☐  $Rm(q) = \frac{150}{q}$
- ☐  $Rm(q) = 0$

10/ Si l'on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$ , que peut-on en déduire pour la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$  ?

- ☐ La droite d'équation  $y = 2x + 1$  est une asymptote horizontale.
- ☐ La droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote oblique.
- ☐ La droite d'équation  $x = 2x + 1$  est une asymptote verticale.
- ☐ La droite d'équation  $y = 2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .

### Exercice 3

#### Partie A : Étude d'une fonction numérique

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x\sqrt{x} - 3x + 2$$

Soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1/ a) Calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ .
- b) La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter graphiquement ce résultat (nature de la demi-tangente).
- 2/ a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (on pourra factoriser par  $x$  ou  $x\sqrt{x}$ ).
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat (direction asymptotique).
- 3/ a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction dérivée est :

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

- b) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]0, +\infty[$  et dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
- c) En déduire la valeur du minimum de  $f$ .
- 4/ a) Montrer que la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [4, +\infty[$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- b) Calculer  $f(4)$  puis déterminer la valeur de  $(f^{-1})'(0)$ .



## Partie B : Application Économique (Gestion et Coûts)

Une entreprise fabrique un produit chimique spécialisé. Le coût total de production (en milliers de dirhams) pour une quantité  $x$  (exprimée en centaines d'unités, avec  $x \in [1, 9]$ ) est modélisé par la fonction :

$$C(x) = x\sqrt{x} - 3x + 10$$

1/ **Coût fixe et Coût variable** : Quel est le montant des coûts fixes de cette entreprise ?

2/ **Coût marginal** :

- Calculer le coût marginal pour une production de  $x = 4$  centaines d'unités (c'est-à-dire calculer  $C'(4)$ ).
- Donner une interprétation économique de ce résultat pour l'entreprise.

3/ **Minimisation du coût moyen** :

- Le coût moyen  $CM(x)$  est défini par  $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$ . Exprimer  $CM(x)$  en fonction de  $x$  pour  $x \in [1, 9]$ .
- Calculer la dérivée  $CM'(x)$  et déterminer la quantité exacte  $x$  à produire pour que le coût moyen de l'entreprise soit minimal.

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$$

On note  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  et l'écrire sous forme d'unions d'intervalles.

2/ a) La fonction  $f$  est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.

b) Montrer que le point  $\Omega(1; 1)$  est le **centre de symétrie** de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

3/ a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

b) En déduire l'équation de l'**asymptote verticale** à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

c) Vérifier que pour tout  $x \in D_f$ , on a :  $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$ .

d) En déduire que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une **asymptote oblique** à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$ .

4/ **Dérivabilité en un point et Tangente (3 pts)**

a) Calculer la valeur exacte de  $f(0)$ .

b) Étudier la **dérivabilité** de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$  en calculant la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

c) Donner l'**interprétation graphique** du résultat obtenu.



(a) Déterminer l'équation de la **tangente** ( $T$ ) à la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) au point d'abscisse  $x_0$

5/ a) Montrer que pour tout  $x \in D_f$ , la fonction dérivée  $f'$  est égale à :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

b) Déterminer le signe de  $f'(x)$  sur  $D_f$ .

c) Dresser le **tableau de variations complet** de  $f$  contenant les limites calculées et les flèches de variations.

6/ a) Calculer la dérivée seconde  $f''(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .

b) Étudier le signe de  $f''(x)$  sur  $D_f$  et en déduire les intervalles sur lesquels la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) est **convexe** ou **concave**.

c) La courbe possède-t-elle un point d'inflexion? Justifier.

7/ Étudier la position relative de la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) par rapport à son asymptote oblique ( $D$ ) :  $y = x$  en étudiant le signe de la différence  $f(x) - x$ .

8/ Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , tracer rigoureusement l'asymptote verticale, l'asymptote oblique ( $D$ ), la tangente ( $T$ ), puis **construire la courbe** ( $\mathcal{C}_f$ ).



### Exercice 5

On considère une fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|---|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | + | 0 | - | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 1 |   | 5 | $+\infty$ |

On admet que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , la fonction est de la forme :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels})$$

### Partie A : Exploitation du tableau de variations

1/ Justifier, d'après le tableau de variations, pourquoi le domaine de définition de  $f$  est  $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

2/ En observant les extremums locaux de la fonction aux abscisses  $x = 0$  et  $x = 2$ , conjecturer les coordonnées du point  $\Omega$  qui pourrait être le **centre de symétrie** de la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ).

3/ a) Déterminer directement à l'aide du tableau les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$



- b) En déduire l'équation de l'**asymptote verticale** à la courbe  $(C_f)$ .
- 4/ a) Donner la valeur exacte de  $f(0)$  et de  $f'(0)$  à partir du tableau.  
 b) Donner l'**interprétation graphique** de la valeur trouvée pour  $f'(0)$ .  
 c) Écrire l'équation de la **tangente**  $(T_0)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = 0$ .

### Partie B : Détermination algébrique et prolongement

- 1/ En utilisant les valeurs lues dans le tableau  $f(0) = 1$  et  $f(2) = 5$ , montrer que  $a = -2$  et  $b = -1$ .

L'expression finale de la fonction est donc :  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}$ .

#### 2/ Asymptote oblique et Position relative (4,5 pts)

- a) Vérifier que pour tout  $x \in D_f$ , on peut écrire :  $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x - 1}$ .
- b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est une **asymptote oblique** à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- c) Étudier la **position relative** de la courbe  $(C_f)$  par rapport à son asymptote oblique  $(\Delta)$ .
- 3/ a) On donne l'expression de la dérivée seconde :  $f''(x) = \frac{-4}{(x - 1)^3}$ . Étudier son signe sur  $D_f$ .  
 b) Préciser les intervalles sur lesquels la courbe  $(C_f)$  est **convexe** ou **concave**. Conclure sur l'existence d'un point d'inflexion.
- 4/ Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , tracer rigoureusement l'asymptote verticale, l'asymptote oblique  $(\Delta)$ , les tangentes horizontales, puis **construire la courbe**  $(C_f)$ .



### Exercice 6

#### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire $g$

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 18$$

- 1/ a) Calculer la fonction dérivée  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b) Étudier le signe de  $g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$  et en déduire le tableau de variations complet de la fonction  $g$  (le calcul des limites aux infinis n'est pas exigé).
- 2/ a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution réelle, notée  $\alpha$ , sur l'intervalle  $[2; 3]$ .  
 b) Justifier que  $g(x) = 0$  possède deux autres solutions sur  $\mathbb{R}$ .  
 c) En déduire rigoureusement le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  en fonction de  $\alpha$ .

#### Partie B : Étude de la fonction économique $f$

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 12x + 18}{x}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



- 1/ a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . En déduire l'existence d'une asymptote verticale à la courbe  $(C_f)$ .  
 b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter géométriquement la nature de la branche infinie en  $+\infty$ .

- 2/ a) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , la dérivée  $f'(x)$  s'exprime sous la forme :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- b) En utilisant les résultats de la **Partie A**, déterminer le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $I$ .  
 c) Dresser le tableau de variations complet de la fonction  $f$  sur  $I$ .  
 3/ a) En utilisant la relation  $g(\alpha) = 0$ , montrer la relation algébrique suivante :  $12\alpha + 18 = 2\alpha^3 + 3\alpha^2$ .  
 b) En déduire que le minimum absolu de  $f$  sur  $I$  est égal à :

$$f(\alpha) = 3\alpha^2 - 24$$

- 4/ a) Calculer la dérivée seconde  $f''(x)$  pour tout  $x \in I$ .  
 b) Étudier la convexité de la courbe  $(C_f)$  sur  $I$  et justifier l'absence de point d'inflexion sur cet intervalle.

### Partie C : Application Économique

Une entreprise marocaine produit un bien de consommation spécifique. Le coût total de production (en milliers de dirhams) pour une quantité  $x$  d'articles produits (où  $x \in [1; 5]$ ) est modélisé par la fonction  $CT(x)$  suivante :

$$CT(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + 18$$

- 1/ a) Justifier que la fonction  $f(x)$  étudiée dans la **Partie B** représente le coût moyen de production par unité, noté  $CM(x)$ .  
 b) D'après les études précédentes, pour quelle quantité exacte de production (exprimée en fonction de  $\alpha$ ) le coût moyen unitaire est-il minimal ?

- 2/ Le coût marginal, représentant le coût de la dernière unité produite, est modélisé par la fonction dérivée du coût total :  $Cm(x) = CT'(x)$ .

- a) Exprimer  $Cm(x)$  en fonction de  $x$ .  
 b) Vérifier par le calcul que pour la valeur optimale  $\alpha$ , on a l'égalité mathématique fondamentale :

$$CM(\alpha) = Cm(\alpha)$$

- c) Interpréter économiquement ce résultat.



#### Exercice 7

### Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire $g$

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3$$



- 1/ a) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) = 3\sqrt{x}$ .  
 b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$  (le calcul des limites n'est pas demandé).
- 2/ a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution réelle, notée  $\beta$ , sur l'intervalle  $[1; 2]$ .  
 b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$  selon les valeurs de  $x$ .  
 c) Justifier algébriquement que  $\beta^3 = \frac{9}{4}$ .

## Partie B : Étude du coût unitaire $f$

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 6\sqrt{x}}{x}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1/ a) Démontrer que pour tout  $x \in I$ , on a l'égalité :  $f(x) = x + \frac{6}{\sqrt{x}}$ .  
 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat.  
 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2/ a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ .  
 b) En déduire que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .  
 c) Déterminer la position relative de  $(C_f)$  par rapport à la droite  $(D)$ .
- 3/ a) Démontrer que pour tout  $x \in I$ , la fonction dérivée  $f'(x)$  vérifie :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x\sqrt{x}}$$

- b) En s'aidant de la **Partie A**, dresser le tableau de variations complet de  $f$  sur  $I$ .
- c) En utilisant la relation  $2\beta\sqrt{\beta} = 3$ , prouver que le minimum absolu de la fonction  $f$  vaut exactement  $f(\beta) = 3\beta$ .

## Partie C : Application Économique

Une entreprise industrielle fabrique un produit liquide. Le coût moyen (unitaire) de production, exprimé en milliers de dirhams par tonne, est modélisé par la fonction  $f(x)$  étudiée dans la **Partie B**, où  $x$  représente la quantité produite en tonnes ( $x \in [0,5; 5]$ ).

- 1/ Déterminer, en fonction de  $\beta$ , la quantité de production permettant de minimiser ce coût moyen par unité.
- 2/ On donne la valeur approchée  $\beta \approx 1,31$  tonne. Calculer le montant minimal de ce coût moyen unitaire en dirhams, arrondi à l'unité près.

**Bénédicte de Spinoza : « Toutes les choses excellentes sont aussi difficiles que rares. »**