



Série 3

Dérivation et ses applications

2 BAC SECO et SGC



S. EL JAAFARI



Table des matières



Exercice 1

Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et déterminer le nombre dérivé de f en x_0 puis calculer $f'(x)$ puis donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 , dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$; $x_0 = 1$.

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-3}$; $x_0 = 2$.

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-3}$; $x_0 = 2$.

d) $f(x) = 2x + \sqrt{x+1}$; $x_0 = 3$.

e) $f(x) = x\sqrt{x-1}$; $x_0 = 2$.

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$; $x_0 = 4$.

g) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$; $x_0 = 3$.



Exercice 2

Calculer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 10$.

b) $f(x) = \frac{3x-5}{2x+1}$.

c) $f(x) = \frac{3x^2-2x}{+} 12x+3$.

d) $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

f) $f(x) = \sqrt{2x^2+3x+1}$.

g) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$.

h) $f(x) = (2x+3)(3x^2-2x+5)$.

i) $f(x) = (2x-5)^3$.



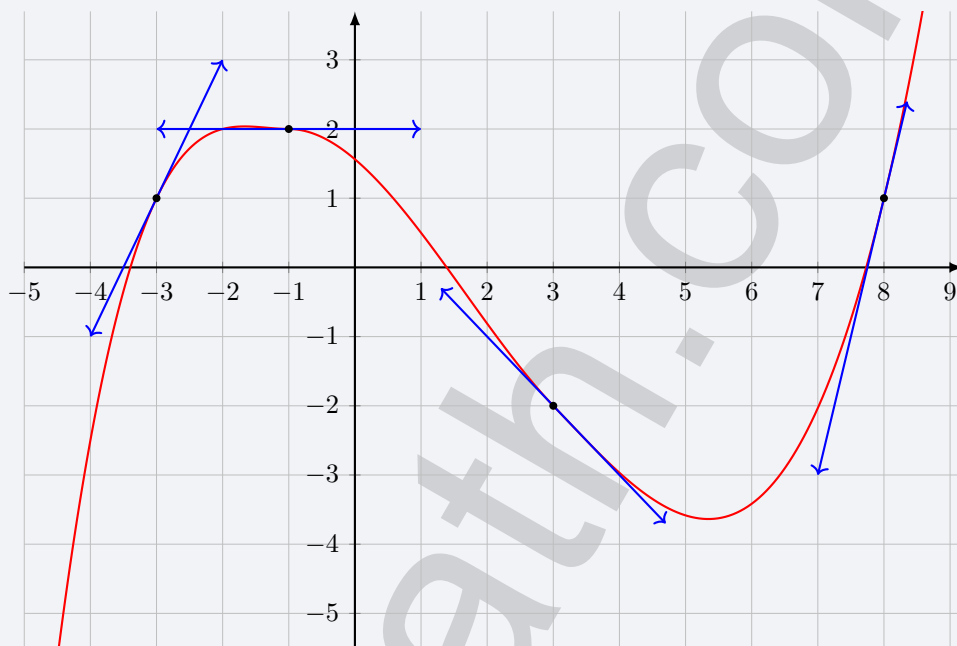
j) $f(x) = x^2\sqrt{x}$.

k) $f(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$.

l) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$.

m) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Exercice 3

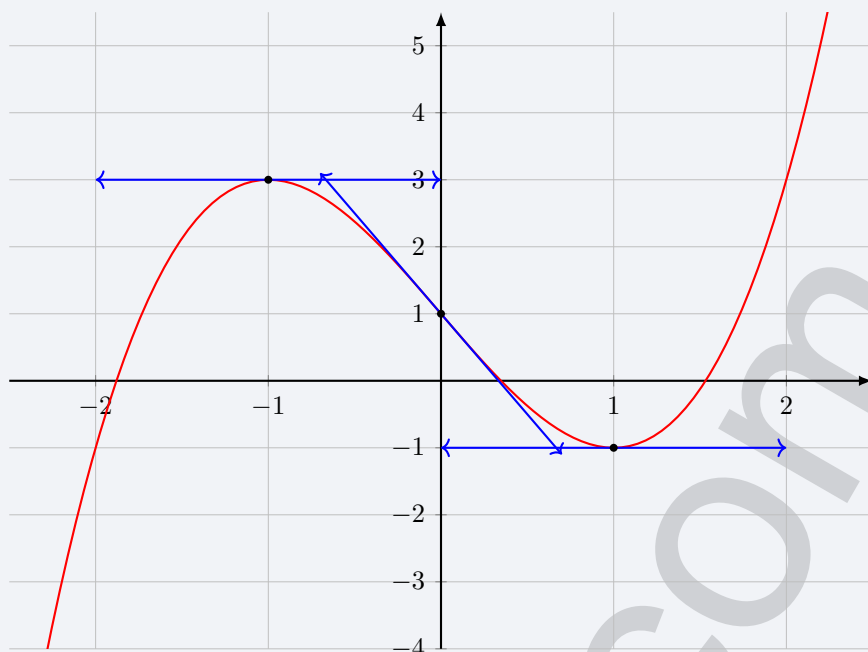


A l'aide de la représentation graphique ci-dessus d'une fonction f , compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	3	8
$f(x)$				
$f'(x)$				

Exercice 4

A l'aide de la représentation graphique ci-dessous de la fonction f , lire graphiquement $f(-1)$; $f'(-1)$; $f(0)$; $f'(0)$; $f(1)$ et $f'(1)$.



Exercice 5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ a) Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$, puis interpréter les résultats obtenus.
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- 2/ a) Vérifier que :

$$(\forall x \in D_f); \quad f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x + 1}$$

- b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
- c) Étudier la position relative de la droite (D) et la courbe (C_f) sur D_f .

- 3/ a) Montrer que :

$$(\forall x \in D_f); \quad f'(x) = \frac{2x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

- b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur D_f , puis dresser le tableau de variations de f sur D_f .

- 4/ a) Montrer que pour tout $x \in D_f$:

$$f''(x) = \frac{4}{(x + 1)^3}$$

- b) Étudier la concavité de la courbe (C_f) sur D_f .

- 5/ a) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
- b) Tracer (T) et (C_f) .



Exercice 6



Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ Donner le domaine de définition de f .
- 2/
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
 - b) Étudier la dérivabilité de f en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
 - c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > -1$.
 - d) Dresser le tableau de variation de f .
- 3/
 - a) Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
 - b) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à D .
- 4/
 - a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
 - b) Tracer (C_f) , (D) et (T) .
- 5/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1,5$.
- 6/
 - a) Montrer que f réalise une bijection de $] -1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Montrer que f^{-1} , la réciproque de f , est dérivable sur J .
 - c) Calculer en fonction de $\alpha : (f^{-1})'(\alpha)$.
 - d) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.



Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x \geq 0, \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- 1/
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b) Vérifier que f est continue en 0.
 - c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2/
 - a) Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat.
 - b) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat.
 - c) Est-ce que f est dérivable en 0? Justifier votre réponse.
- 3/
 - a) Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ puis étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
 - b) Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty; 0[$ puis étudier les variations de f sur $] -\infty; 0[$.
 - c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 4/ Soit g la restriction de f sur $I =] -\infty; 0[$.



- a) Montrer que g admet une fonction réciproque sur un ensemble J que l'on déterminera.
- b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J .

Exercice 8

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{3-2x}.$$

- 1/ Déterminer D_f , puis calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

- 2/ Étudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{3}{2}$, puis interpréter graphiquement le résultat.

- 3/ a) Montrer que :

$$\forall x \in \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[, \quad f'(x) = \frac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}.$$

- b) Déterminer le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f .
- c) Conclure les extrémums de f , puis déduire que :

$$\forall x \in D_f; \quad f(x) \leq 1$$

Exercice 9

On considère la fonction numérique f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}.$$

(C_f) sa courbe représentative.

- 1/ Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

- 2/ a) Montrer que :

$$(\forall x > 1); \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

- b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

- 3/ Montrer que :

$$(\forall x > 1); \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}.$$

- 4/ Donner le tableau de variation de f .

- 5/ Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que

$$1 < \alpha < \frac{3}{2}.$$



Exercice 10



$$f(x) = (x - 1) \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$$

- 1/ Déterminer D le domaine de définition de la fonction f .
- 2/ Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$, en $-\infty$ et -1 à gauche.
- 3/ Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1 à droite.
- 4/ Donner le tableau de variations de f .
- 5/ g est la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
 - a) Montrer que la fonction g admet une réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - b) Calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.
 - c) Résoudre l'équation suivante :

$$g^{-1} \left(\frac{1}{2}(x - 1) \right) - x = 0$$