



Série 4

Limites et Continuité

2 BAC SECO et SGC



S. EL JAAFARI



Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{9x - 20}{x^2 - 10x + 9}$.

2. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$.

4. $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 3}{4 - x}}$.

5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$.

6. $f(x) = 3x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$.



Exercice 2

Calculer en justifiant la réponse, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 22x - 23}{x - 1}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x + 5} - 3}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 - x}{x^2 - 6x + 9}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + 1}$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - 4x)$.

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$.

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 1 + \frac{3}{\sqrt{x + 2}}$.

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$.

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$.



Exercice 3

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$$

- 1/ a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 6x(x - 1)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.
 b) Dresser le tableau de variations de g dans $\mathbb{R}$. (On calculera $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$).
 2/ a) Donner le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

$$g(x) = -2,5 \quad ; \quad g(x) = 22 \quad ; \quad g(x) = -2.$$

- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = -2$.
 c) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$ puis en déduire les solutions de l'équation $g(x) = -3$.
 3/ a) Déterminer $g([1; +\infty[)$ et $g(]-\infty; 1])$.
 b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty; 1]$.
 c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution dans $]\frac{3}{2}; 2]$.
 d) Dresser le tableau de signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 e) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2}{x - 2} > 0$.



Exercice 4

Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x - 1}{x^3 + 2x - 3} + \frac{11}{20} & \text{si } x < 1 \\ g(1) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

- 1/ a) Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[) \quad g(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + 2}$.
 b) En déduire que g est continue à droite en 1.
 2/ a) Montrer que $(\forall x \in]-\infty; 1[) \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 3} + \frac{11}{20}$.
 b) Étudier la continuité de g à gauche en 1.
 3/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 b) Démontrer que $(\forall x \in]1; +\infty[) \quad g(x) = \frac{\sqrt{1 + 4x + 2x^2} - 2x}{1 - 4x}$;
 puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 c) Déterminer les asymptotes de la courbe (C_g) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.



Exercice 5

1/ Soit f la fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	-5	-8	5

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

2/ Soit g la fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$g(x)$	-1	2	-3	-1

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

3/ Soit h la fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	1	-3	1

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.



Exercice 6

1/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ $I = \left] -1, -\frac{1}{2} \right[$.

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3$ $I =]-2, 2[$.

c) $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ $I =]-1, 1[$.

2/ Soit g la fonction définie et continue sur $[-3, 2]$ par le tableau de variations suivant :

x	-3	0	2
$g(x)$	2	1	-2

- a) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha \in]-3, 2[$ et $g(\alpha) = 1,5$.
 b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β telle que $0 < \beta < 2$.

Exercice 7

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100.$$

- 1/ Déterminer la limite de g en $+\infty$.
 Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 2/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[20; 40]$. Donner en justifiant une valeur approchée de α à l'unité près.
- 3/ En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}.$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 1 cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 20 en ordonnée).

- 1/ Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
- 2/ Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

où g est la fonction définie dans la partie A.

- 3/ Étudier les variations de f .
- 2/ Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe (C) .
- 3/ Construire (C) et (D) sur le même graphique.
- 6/ Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C

Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unités, est défini sur $]0; 100[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

$C(x)$ étant exprimé en centaines de dirhams. Le coût moyen de fabrication par centaine d'objets est donc défini par $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1/ Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.

2/ On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 13 000 DH.

Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.



Exercice 8

Partie I

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2/ a) Montrer que $f'(x) = 1 + \frac{3}{2x\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

3/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $\alpha \in]1; 2[$.

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie II

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1/ a) Montrer que pour tout $x \neq 1$: $h(x) = x + 2$.

b) Déterminer la valeur de k pour que h soit continue en 1.



Exercice 9

Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} de l'intervalle I vers un intervalle J à déterminer puis déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$, dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = 2x - 5 \quad I = \mathbb{R}.$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad I =]-\infty, 2].$

c) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1} \quad I =]1, +\infty[.$

d) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad I = [1, +\infty[.$

e) $f(x) = x - 2\sqrt{x-1} - 5 \quad I = [3, +\infty[.$

f) $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad I =]0, 1].$

g) $f(x) = \frac{3+\sqrt{x}}{3-x} \quad I = [0, 3[.$



Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 4}{x} & \text{si } x < -1 \\ 2\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- 1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
 c) La fonction f est-elle continue en -1 ? Justifier.

2/ On donne le tableau de variation de f sur $] -\infty, -1]$:

x	$-\infty$	-2	1
$f(x)$	$-\infty$	2	1

La restriction de f à $] -\infty, -1]$ réalise-t-elle une bijection ? Justifier.

3/ On a représenté dans un repère orthonormé $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-1, +\infty[$, ainsi que la droite d'équation $(\Delta) : y = x$.

- a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
 b) Tracer dans le même repère $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} .

4/ Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans $[1, 2]$.

