



Série 4

Dérivation et ses applications

2 BAC SECO et SGC S. EL JAAFARI



Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}$$

- 1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- 2/ Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3/ Montrer que pour tout $x \in D_f$, la fonction dérivée f' est égale à :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 5}{(x - 2)^2}$$

- 4/ Dresser le tableau de variations complet de f .
- 5/ Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative C_f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 6/ Vérifier que le point $A(3, 10)$ appartient à la courbe de f puis déterminer l'équation de la tangente (Δ) à la courbe de f au point A .
- 7/ Sachant que la droite $(D) : y = -x + 1$ est une tangente à la courbe de f , déterminer les coordonnées du point de tangence.

Exercice 2

Une entreprise produit une quantité x d'un certain produit (en milliers d'unités), où $x \in [0; 10]$.
Le coût total de production (en milliers de dirhams) est modélisé par la fonction :

$$C(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 20$$

Chaque unité produite est vendue au prix de 15 dirhams (soit $15x$ milliers de dirhams pour x milliers d'unités).

1/ Étude du coût marginal :

- a) Déterminer l'expression du coût marginal $C_m(x) = C'(x)$.
- b) Étudier les variations de la fonction C sur $[0; 10]$.

2/ Étude du bénéfice :

- a) Montrer que la fonction bénéfice $B(x)$ réalisée par l'entreprise est donnée par :

$$B(x) = -x^3 + 9x^2 - 9x - 20$$



b) Calculer la fonction dérivée $B'(x)$.

c) En déduire la quantité x que l'entreprise doit produire pour réaliser un **bénéfice maximal**. Quel est ce bénéfice ?



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $D_f =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{ax + b}{x - 3} \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels})$$

On sait que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$. De plus, on donne $f'(1) = \frac{1}{2}$.

- 1/ En utilisant la limite en $+\infty$, déterminer la valeur du coefficient a .
- 2/ Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
- 3/ En utilisant la valeur de $f'(1)$, déterminer la valeur du coefficient b .
- 4/ Dresser le tableau de variations de la fonction f ainsi obtenue.



Exercice 4

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12$$

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur $]0 ; +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de g (les limites ne sont pas demandées pour cette partie).
3. Calculer $g(3)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; 3]$ et sur $[3 ; +\infty[$.

Partie B : Analyse d'une fonction de coût moyen

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 12 - \frac{12}{x}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le premier résultat.
2. Déterminer la nature de la **branche infinie** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

4. En utilisant les résultats de la Partie A, dresser le tableau de variations complet de f .
5. Étudier la **concavité** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer les coordonnées de son **point d'inflexion** I .



6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie C : Application Économique (Seuil de rentabilité et Profit)

Une entreprise produit un composant électronique. Le coût moyen de production de x centaines d'unités (avec $x > 0$) est modélisé par la fonction $f(x)$ de la Partie B (en milliers de dirhams).

Le prix de vente unitaire sur le marché impose une recette marginale constante, ce qui amène l'entreprise à étudier la fonction de profit global définie par :

$$P(x) = -x^3 + 6x^2 + 12x$$

1. Calculer le profit marginal $P'(x)$.
2. Déterminer la quantité exacte x_0 (en centaines d'unités) que l'entreprise doit produire pour **maximiser son profit**.
3. Quel est le montant de ce profit maximal en dirhams ?

Exercice 5

Soit h la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$h(x) = (x-1)\sqrt{x-1} - 3x + 3$$

1/ Étude de la dérivabilité en $x_0 = 1$:

- a) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$.
- b) La fonction h est-elle dérivable à droite en 1 ? Interpréter graphiquement ce résultat (nature de la tangente).

2/ Variations et limites :

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ (Factoriser par x ou $\sqrt{x-1}$ si nécessaire).
- b) Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1} - 3$$

- c) Résoudre l'équation $h'(x) = 0$, puis dresser le tableau de variations de h .

3/ Dérivabilité de la fonction réciproque :

- a) Montrer que la restriction de h à l'intervalle $I = [5; +\infty[$ admet une **fonction réciproque** h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b) Justifier que h^{-1} est dérivable en 0.
- c) Sachant que $h(5) = 0$, calculer $(h^{-1})'(0)$.

Exercice 6

Partie I : Étude d'une fonction numérique



On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Limites et branches infinies :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe (C_f) .
- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) .

2/ Variations de la fonction :

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la fonction dérivée f' est égale à :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
- En déduire les extremums locaux de f .

3/ Points d'inflexion et Concavité :

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la dérivée seconde de f est égale à :

$$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3}$$

- Étudier la concavité de la courbe (C_f) (préciser où elle est convexe / concave). La courbe présente-t-elle un point d'inflexion ? Justifier.

4/ Tracé de la courbe :

- Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 2$.
- Construire soigneusement les asymptotes, la tangente (T) , puis la courbe (C_f) .

5/ Fonction réciproque :

- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1; 3]$. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- Calculer $g(2)$. La fonction g^{-1} est-elle dérivable en 3 ? Si oui, calculer $(g^{-1})'(3)$.

Partie II : Application Économique

Une entreprise marocaine fabrique des sacs de voyage haut de gamme. Le coût total de production (en milliers de dirhams) pour une quantité x de sacs (exprimée en dizaines d'unités) est modélisé par la fonction $f(x)$ étudiée dans la Partie A, sur l'intervalle $x \in [2; 8]$.

Chaque dizaine de sacs est vendue à un prix unitaire de 2 milliers de dirhams.



1/ Coût moyen et Coût marginal :

- La fonction $f(x)$ représente ici le coût total. Calculer le coût marginal pour la production de 2 dizaines de sacs (c'est-à-dire calculer $f'(2)$). Interpréter le résultat.
- Pour quelle quantité produite le coût total est-il minimal sur l'intervalle $[2; 8]$?

2/ Maximisation du Bénéfice :

- Exprimer la fonction Recette totale $R(x)$ en fonction de x .
- Montrer que le bénéfice réalisé par l'entreprise (en milliers de dirhams) est donné par la fonction :

$$B(x) = \frac{-x^2 + x - 7}{x - 1}$$

- Calculer la fonction dérivée $B'(x)$.
- Déterminer la quantité exacte x à produire (en dizaines) pour réaliser un bénéfice maximal, puis calculer ce bénéfice. L'entreprise gagne-t-elle ou perd-elle de l'argent ?



Exercice 7

Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants, après avoir précisé l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}_{f'}$:

1/ Sommes et Constantes (Base)

- $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7x + 10$
- $f(x) = x^2 - \frac{3}{x} + 4\sqrt{x}$

2/ Règle du Produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$

- $f(x) = (3x^2 - 1)(2x + 5)$
- $f(x) = x^2\sqrt{x}$

3/ Règle de l'Inverse et de l'Inverse Composé : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

- $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$
- $f(x) = \frac{5}{2x - 3}$

4/ Règle du Quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

- $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 4}$ (Astuce : utilisez aussi la méthode du déterminant rapide)
- $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{2x - 1}$

5/ Fonctions Puissances : $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

- $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^3$
- $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$



6/ Fonctions avec Racines Carrées Composées : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$



Exercice 8

Quiz : Dérivation et Applications Économiques

Niveau : 2ème BAC Sciences Économiques (SECO / SGC)

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$. Quelle est la fonction dérivée f' de f ?

☐ $f'(x) = 3x - 5$

☐ $f'(x) = 6x - 5$

☐ $f'(x) = 6x - 5x$

☐ $f'(x) = 6x - 9$

Astuce : La dérivée de x^n est nx^{n-1} et la dérivation est linéaire (dérivation terme à terme).

2. Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Quelle est l'expression de sa dérivée $f'(x)$?

☐ $f'(x) = \frac{2}{x+1}$

☐ $f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$

☐ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

☐ $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$

Astuce : Utilisez la formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

3. Soit $f(x) = (3x - 2)^4$. Quelle est la dérivée de cette fonction ?

☐ $f'(x) = 12(3x - 2)^3$

☐ $f'(x) = 4(3x - 2)^3$

☐ $f'(x) = 3(3x - 2)^3$

☐ $f'(x) = 12(3x - 2)^4$

Astuce : Règle de la fonction composée $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$.

4. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$. Déterminez l'expression de $f'(x)$ sur son domaine de définition.

☐ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$



☐ $f'(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x+1}}$

☐ $f'(x) = 2x+5$

☐ $f'(x) = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+1}}$

Astuce : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

5. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 2$?

☐ $y = 9x + 4$

☐ $y = 9x - 18$

☐ $y = 3x - 2$

Astuce : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$

6. Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$. Sur quel intervalle la fonction f est-elle croissante ?

☐ $[2, +\infty[$

☐ $[-2, 2]$

☐ $] -\infty, 2]$

☐ $\mathbb{R}$

Astuce : Étudiez le signe de $f'(x) \geq 0$.

7. Le coût total de production d'une entreprise est $C(q) = 0,1q^2 + 10q + 500$. Quel est le coût marginal $Cm(50)$ pour $q = 50$?

☐ 20

☐ 770

☐ 10

☐ 35

Astuce : Le coût marginal est la dérivée du coût total : $Cm(q) = C'(q).$

8. La fonction de demande est $p(q) = -2q + 120$ et $R(q) = p(q) \times q$. Quelle est la recette marginale $R'(20)$?

☐ 1600

☐ 80

☐ 120

☐ 40

Astuce : Exprimez d'abord $R(q)$ sous forme de polynôme, puis dérivez-la.

9. Le bénéfice est $B(q) = -0,5q^2 + 40q - 200$. Pour quelle quantité q le bénéfice est-il maximal ?

☐ 20

☐ 40

☐ 80

☐ 100



Astuce : Le maximum est atteint lorsque la dérivée s'annule.

10. Le coût moyen est $CM(q) = q + \frac{100}{q}$ pour $q > 0$. Pour quelle quantité q ce coût moyen est-il minimal ?

- ☐ 5
- ☐ 20
- ☐ 10
- ☐ 50

Astuce : Calculez $CM'(q)$ en sachant que la dérivée de $\frac{1}{q}$ est $-\frac{1}{q^2}$.