



Série 4

Étude des fonctions

2 BAC SECO et SGC

S. EL JAAFARI



Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2x-2}{x+3} \geq 0$.
b) En déduire que le domaine de définition de f est $D_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$.
c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire l'équation de l'**asymptote horizontale** à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
d) Calculer $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$. Quelle est la nature de l'**asymptote** correspondante et son équation ?
- 2/ a) Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable sur $] -\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.
b) Étudier la **dérivabilité à droite au point** $x_0 = 1$ en calculant la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

- c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
- 3/ a) Soit $u(x) = \frac{2x-2}{x+3}$. Calculer la fonction dérivée $u'(x)$ sur D_f .
b) En déduire que pour tout $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2 \times \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}$$

- c) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur les intervalles de dérivabilité.
 - d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f
- 4/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.



Exercice 2

I - On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$



1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2/ Montrer, pour tout réel x , que

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3/ Donner le tableau des variations de g .

4/ En déduire, pour tout réel x , que $g(x) > 0$.

II - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.

3/ Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4/ a) Montrer, pour tout réel x , que $f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau des variations de f .

5/ Calculer $f(1)$ puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

III - 1/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

3/ Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

1/ Montrer que $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

3/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.

5/ a) Vérifier que $\forall x \in D_f, f(x) - x = \frac{x(4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$.

b) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(D) : y = x$ sur D_f .



6/ a) Montrer que sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-4}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

7/ Tracer (C_f) (On admet que $I(9; \frac{9}{2})$ est un point d'inflexion de (C_f)).

8/ Soit g la restriction de f sur $[4; +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer.

b) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x}$$

1/ Montrer que : $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

2/ Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

3/ Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, et Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

4/ a) Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2(x-1) \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1 \right)}$$

b) Dresser le tableau de variations de f .

5/ a) Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

b) Étudier les branches infinies de (C_f) .

6/ Tracer (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7/ Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer.

b) Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 + 1}$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f , D_f .



2/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, puis en déduire une interprétation graphique.

3/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4/ Montrer que les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = -x + 1$ sont respectivement des asymptotes à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

5/ a) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

5/ Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

6/ Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.

7/ Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $(g^{-1})'(0)$.

c) Comparer $g^{-1}(\sqrt[3]{2})$ et $g^{-1}(\sqrt[4]{4})$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

2/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) .

3/ a) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1 à droite et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4/ Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $g\left(\frac{5}{3}\right)$ et en déduire $g^{-1}\left(\frac{19}{6}\right)$.

c) Tracer $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Exercice 7



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{2}{x} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} & ; x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ a) Montrer que f est continue en $x_0 = 1$
b) Calculer $f(-2)$; $f(-\sqrt{2})$; $f(-1)$; $f(1)$ et $f(4)$
- 2/ a) Montrer que f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$
b) Donner l'équation de la demi-tangente (Δ_1) à gauche en $x_0 = 1$
c) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu
- 3/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
b) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$, dont on donnera l'équation réduite
- 4/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$
- 5/ Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de 0
- 6/ a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = -1 - \frac{2}{x^2} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f'(x) = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}} & ; x \in]1, +\infty[\end{cases}$$
 b) Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation
- 7/ a) Donner l'équation de la tangente (Δ_2) à (C_f) au point d'abscisse $-\sqrt{2}$
b) Construire les droites (D) , (Δ_1) , (Δ_2) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 8/ Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $] -\infty, 0[$
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et en déduire $g^{-1}(0)$
 - c) Construire dans le même repère la courbe représentative de g^{-1} que l'on notera $(C_{g^{-1}})$
 - d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $g^{-1}(x)$



Exercice 8



On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1} & ; \text{ si } x < 1 \\ f(x) = 1 - \sqrt{x - 1} & ; \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Continuité et dérivabilité

- 1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et vérifier que $f(1) = 1$.
b) Montrer que la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.
- 2/ a) Étudier la dérivabilité de f à gauche au point $x_0 = 1$, puis interpréter graphiquement le résultat.
b) Étudier la dérivabilité de f à droite au point $x_0 = 1$, puis interpréter graphiquement le résultat.
c) La fonction f est-elle dérivable au point $x_0 = 1$? Justifier.

Partie B : Limites et branches infinies

- 1/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- 2/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Partie C : Variations et construction

- 1/ a) Montrer que pour tout $x < 1$: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 1$.
- 2/ Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 3/ Construire les asymptotes, les demi-tangentes au point d'abscisse 1, puis la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Fonction réciproque

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$. En économie, la fonction g modélise le prix unitaire d'un produit (en centaines de dirhams) en fonction de la quantité x demandée (en milliers d'unités).

- 1/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 2/ Calculer $g(2)$ et en déduire $(g^{-1})'(0)$.
1. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
(L'expression $g^{-1}(x)$ représente la quantité demandée en fonction du prix fixé x).

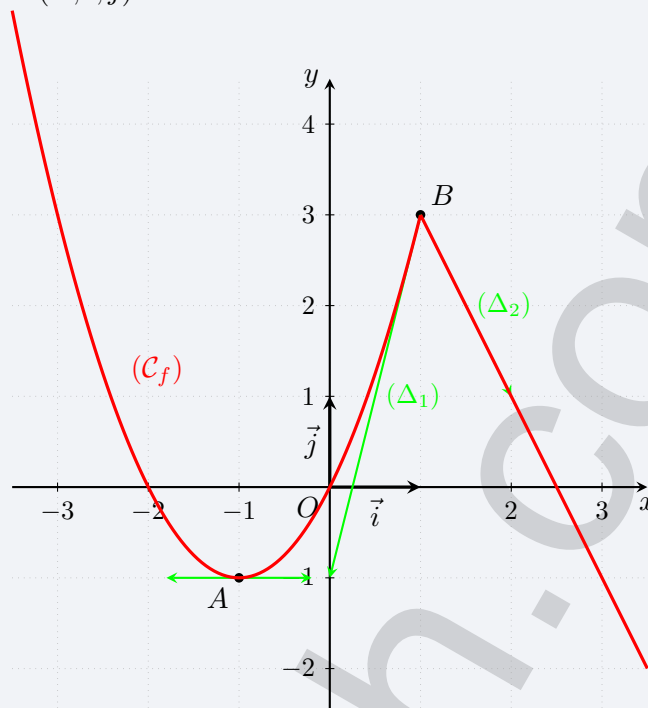


Exercice 9



Partie A : Lecture graphique

On considère une fonction numérique f définie et continue sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative (C_f) est donnée dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous :



En utilisant ce graphique et les données associées, répondre aux questions suivantes :

- 1/ Déterminer par lecture graphique les images suivantes : $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
- 2/ Déterminer le nombre d'antécédents du nombre 0 par la fonction f . Quels sont-ils ?
- 3/
 - a) Donner la valeur du nombre dérivé en -1 , noté $f'(-1)$.
 - b) Déterminer graphiquement le nombre dérivé à gauche en 1, noté $f'_g(1)$, et le nombre dérivé à droite en 1, noté $f'_d(1)$.
- 4/
 - a) Donner l'équation réduite de la tangente horizontale à (C_f) au point A.
 - b) Donner l'équation réduite de la demi-tangente à droite (Δ_2) au point B.

Partie B : Étude analytique de la fonction

La courbe (C_f) de la Partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x & ; \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = 5 - 2x & ; \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

- 1/
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et vérifier que $f(1) = 3$.
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ puis en déduire que f est continue au point $x_0 = 1$.
- 2/
 - a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ et retrouver algébriquement la valeur de $f'_g(1)$ lue à la Partie A.



- b) Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et retrouver algébriquement la valeur de $f'_d(1)$.
c) Interpréter géométriquement la nature du point $B(1; 3)$ pour la courbe (C_f) .

3/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 4/ a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

**«Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres»
Samuel Johnson**

