



Série 4

Limites et Continuité

2 BIOF PC et SVT



S. EL JAAFARI



Exercice 1

1/ Ranger dans l'ordre croissant les nombres réels suivants : $a = \sqrt[3]{2}$, $b = 7^{\frac{1}{4}}$, $c = \sqrt[6]{15}$,
puis $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt[3]{2}$, $c = \sqrt[4]{4}$.

2/ Montrer que : $\frac{(\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt{8} \times \sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{2}} = 4$.

3/ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$: $(E_1) : \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$ et $\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$.

4/ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - 3x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{3x-2}}{x-1}$
et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{\frac{16x+5}{x-3}}$.

5/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{a-ax} & ; \quad x < 1 \\ f(x) = \frac{2-x^3}{x+1} & ; \quad x > 1 \\ f(1) = b \end{cases}$$

Déterminer les valeurs des réels a et b pour que la fonction f soit continue en 1.

6/ Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes : $f(x) = \cos(\sqrt{x^4+4})$ et
 $g(x) = \sqrt[3]{5x^2+2x+1}$.



Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x^3} + \sqrt{x}}{1-x} & ; \quad \text{si } x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{3x+1}{2x+1} & ; \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1/ Étudier la continuité de la fonction f est continue en 0.

2/ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3/ Montrer que $\forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[; f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{1-x}$.

4/ Étudier la continuité de f sur $]1, +\infty[$.

5/ a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

b) En déduire les variations de f sur $]1, +\infty[$.

6/ Montrer que l'équation $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$.

7/ Montrer que $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$.



Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}.$$

1/ a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2/ Étudier la continuité de la fonction f sur D_f .

3/ Étudier les variations de f sur D_f .

4/ On considère l'équation : $(E) : f(x) = x$.

a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1, 2[$.

b) Montrer que : $2 - \alpha = \sqrt[3]{\alpha^2 - 1}$.

c) Donner un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1} .

5/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $g^{-1}([0; 1])$.

c) Calculer $(\forall x \in J) : g^{-1}(x)$.



Exercice 4

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

1/ Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2/ a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Déterminer : $f(]-\infty; 0])$; $f([0; 2])$ et $f([0; 3])$.

3/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions α , β et γ telles que :

$$\alpha < 0 \quad ; \quad 0 < \beta < 2 \quad \text{et} \quad \gamma > 2$$

b) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4/ Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\lambda \in]3; 4[$.

**Exercice 5**

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x}$$

- 1/
 - a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
 - b) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
 - c) Dédire que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} en déterminant son domaine de définition.
- 2/
 - a) Calculer : $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right)$
 - b) Comparer les deux nombres : $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $f^{-1}(\sqrt[3]{2})$
- 3/ Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition de f^{-1} .

**Exercice 6**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$$

- 1/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 2/ Montrer que f est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- 3/
 - a) Montrer que :

$$(\forall x > 1) \quad f'(x) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1} (\sqrt{x^2 - 1} + 1)} \right) (x^2 - 2)$$
 - b) Dédire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1, \sqrt{2}]$.
- 4/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Montrer que : $(\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[) \quad g^{-1}(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1} - 1 \right)^2$
 - c) Dédire $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

**Exercice 7**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

- 1/ Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- 2/
 - a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
 - b) Vérifier que $f'(x) = 3x^2 + 2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
 - c) Dédire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- 3/ a) Déterminer $f(]-\infty; 0])$.
 b) Dédire que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
- 4/ a) Déterminer $f([1; +\infty[)$.
 b) Dédire que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- 5/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0; 1[$.
 b) Utiliser la méthode de dichotomie pour donner un encadrement de α d'amplitude 0,25. (vous pouvez utiliser une calculatrice)
 c) Montrer que $\alpha = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 + 1}$
- 6/ Dédire que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution réelle.
- 7/ Dédire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- 8/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 b) Calculer $f^{-1}(0)$
 c) Calculer $(f^{-1})'(0)$



Exercice 8

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$$

- 1/ a) Déterminer D_f
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 2/ a) Étudier la dérivabilité de f en 0^+ , puis interpréter le résultat géométriquement.
 b) Écrire l'équation de (T) la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse 0, à droite.
- 3/ a) Étudier la dérivabilité de f sur D_f , et montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)$$

 b) Calculer $f'(4)$ et $f'(1)$ puis interpréter géométriquement chacun des résultats.
 c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4/ a) Montrer que (C_f) coupe l'axe (OX) en deux points A et B à déterminer.
 b) Étudier la position relative de (C_f) et l'axe des abscisses.
- 5/ a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) - x = x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3)$$

 b) Dédire que (C_f) coupe la droite $(D) : y = x$ en trois points A, E et F .
 c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) .
- 6/ a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f''(x) = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$$

 b) Dédire la concavité de (C_f) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I et donner ses coordonnées.
- 7/ Tracer dans le même repère : la demi-tangente (T) , la droite (D) et la courbe (C_f) .

 Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4x\sqrt{x} & , \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = 1 - \sqrt[3]{1-x} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ a) Calculer les deux limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Montrer que f est continue en 0.
- 2/ a) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
b) Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
- 3/ a) Montrer que $f'(x) = 6\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$, pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.
b) En déduire la monotonie de f sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$.
- 4/ a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $] - \infty, 0[$.
b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] - \infty, 0[$.
- 5/ a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$, dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
b) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse positive et déterminer ses coordonnées.
- 6/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =] - \infty, 0]$.
Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 7/ a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $] - \infty, 0]$ et déduire la valeur de $g^{-1}(-1)$.
b) Montrer que g^{-1} est dérivable en -1 puis calculer $(g^{-1})'(-1)$.
- 8/ a) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$, pour tout x de J .
b) Calculer $(g^{-1})'(x)$, pour tout x de J et retrouver $(g^{-1})'(-1)$.