

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - x ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[4]{x^2+1} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2+7}-5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+7}-6} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{2x+8}}{x+\sqrt{x}-4} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x+2}-5}{x^4-6x-4} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Exercice 2

$$1) \text{ Calculer } S = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 ; \quad T = \arctan 2 + \arctan 3$$

$$2) \text{ Montrer que } \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{x-1} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\arctan(x^2)} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) - \pi}{x-1}$$

Exercice 4

Soit f une fonction continue et strictement positive sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$)

$$1) \text{ Montrer que : } (\exists \alpha > 0)(\forall x \in [a, b]), f(x) \geq \alpha$$

$$2) \text{ Soient } g \text{ et } h \text{ deux fonctions continues sur } [a, b] \text{ telles que : } (\forall x \in [a, b]); h(x) > g(x)$$

$$\text{Montrer que : } (\exists \beta > 0)(\forall x \in [a, b]); h(x) \geq g(x) + \beta$$

Exercice 5

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} f(x) = x \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$1) \text{ Etudier la continuité de la fonction } f \text{ en } x_0 = 0$$

$$2) \text{ Etudier la parité de la fonction } f$$

$$3) \text{ a) Montrer que : } (\forall x \in \mathbb{R}_+^*): f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan x$$

$$(\text{on pourra poser } x = \tan t, \text{ avec } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[)$$

$$\text{b) En déduire une expression plus simple de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$4) \text{ On considère, dans } \mathbb{R}_+^*, \text{ l'équation } (E): \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{a) Montrer que } (E) \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$$

$$\text{b) En déduire les solutions de l'équation } (E)$$

Exercice 6

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue sur $[0, +\infty[$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L < 1$

Montrer que : $(\exists \alpha \in [0, +\infty[) : f(\alpha) = \alpha$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition D_f , et étudier la continuité de la fonction f sur D_f dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{(x-1)(x^2+1)} & ; & & b) \quad f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)} \\ c) \quad f(x) &= \frac{x \sin(\pi x)}{E(x)} & ; & & d) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|} ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$

- 1) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = p^2$ ($p \in \mathbb{R}^*$)

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{2x^2-1} & ; |x| > 1 \\ f(x) = 2 - (x+1)E(x) & ; |x| \leq 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f , l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .