



Série 1

Limites et Continuité

2 BAC SM



S. EL JAAFARI

I- Énoncés des exercices



Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+7}{2x^2-4x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{14+5x-x^2}{2x^3+2x^2+3x+6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+7} + 3x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2-2} - 2x)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+3} - x)$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-x-3}{x-1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{4x+1}}{x-2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt{x^2+4}}{2x+1-\sqrt{4x^2+1}}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} - x \right)$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)\sqrt{x^2-x}-2x^2+5x-3}{2\sqrt{x^2-2x}+2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+1}}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) (\sqrt{x^2+4x+2} - \sqrt{x^2+3x+3})$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$

o) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos(2x)}$

p) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x-\pi} \left(\frac{2}{\sin(2x)} - \frac{1}{\tan x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-x+2}{3x^2+5x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-x^2}{1+x-2x^2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-x}{\sqrt{1+x}-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1-2x} - \sqrt{4-7x})$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+x+1})$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2-5x-14}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}}{\sqrt{x^2+8}-3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x \right)$

$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3x^2+x-4}{1-2\sqrt{x+x}}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{4\sin^2 x-3}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$



$$q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right)$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) - \sin x}{\tan x + \sin(2x)}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}+4}{x^2-3}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0^+} x E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$w) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + E\left(\frac{1}{x}\right)}{x - E\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos^2 x}{\sin x - \cos^2 x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(2x)) \sin x}{\tan^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(2x)}{E(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x E(x) - 5}{x^2 + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x \cos(x) + 3}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f .

2/ Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

3/ Étudier la continuité de f sur D_f .

Exercice 3

Étudier la continuité de la fonction g en x_0 dans chacun des cas suivants :

$$a/ g(x) = \frac{|x-2|+1}{x^2+1} ; x_0 = 2$$

$$b/ \begin{cases} g(x) = \frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2} ; x \neq 3 \\ g(3) = 3 \end{cases} ; x_0 = 3$$

$$c/ \begin{cases} g(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) ; x < 0 \\ g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}} ; x > 0 \end{cases} ; x_0 = 0$$



$$d/ \begin{cases} g(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ g(0) = \frac{3}{2} \end{cases} ; x_0 = 0$$

$$e/ \begin{cases} g(x) = x - 1 + \cos(\pi x) & ; x \leq 2 \\ g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & ; x > 2 \end{cases} ; x_0 = 2$$

Exercice 4

Déterminer les valeurs du réel a pour que la fonction f soit continue en x_0 , dans les cas suivants :

$$a) \begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + ax}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases} ; x_0 = 2.$$

$$b) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} & ; x \in [0; 2[\cup]2; +\infty[\\ f(2) = a \end{cases} ; x_0 = 2$$

$$c) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+5} - 5}{x - 10} & ; x \in [-\frac{5}{2}, 10[\cup]10; +\infty[\\ f(10) = \frac{1}{5} \end{cases} ; x_0 = a$$

Exercice 5

1/ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \sin(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet un prolongement par continuité en 0 que l'on déterminera.

2/ Établir que la fonction g définie sur $[0; 4[\cup]4; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x} - 5}{x - 4}$$

est prolongeable par continuité en $x_0 = 4$ et déterminer son prolongement par continuité en $x_0 = 4$.

Exercice 6

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$$

1/ Déterminer son ensemble de définition D_h .



2/ a/ Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$.

b/ La fonction h admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

3/ Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

1/ a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) ; f(x) \geq \frac{1}{x}$

b/ En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2/ a/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}) ; f(x) \leq \frac{1}{x}$

b/ En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I puis déterminer $f(I)$.

1) $f(x) = x^2 + x + 1$; $I = [-1; 3]$

2) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$; $I =]-2; 2]$

3) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$; $I = [0; 3[$

4) $f(x) = 1 + 2 \sin x + \frac{x}{3}$; $I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$

5) $\begin{cases} f(x) = x + 2 & ; x \leq 1 \\ f(x) = -3x^2 & ; x > 1 \end{cases}$; $I = [-3; 2]$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans l'intervalle I :

1) $x^4 + x^2 + 2x - 1 = 0$; $I = [0; 1]$

2) $2 \sin x = x$; $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

3) $x^2 - 5\sqrt{x} = -1$; $I = [1; 4]$



Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation donnée admet une unique solution α dans l'intervalle donné I :

1) $x^5 + x^2 + 2 = 0$; $I = [-2; -1]$

2) $x^4 + 2x = 5$; $I = [1; +\infty[$

3) $1 + 2 \sin x = -3x$; $I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$



II– Corrigés des exercices



Solution Exercice 1

a/ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2 + 3x}{1 + x - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{-x^2} = 1$ (Règle des monômes de plus haut degré).

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 2}{3x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$.

b/ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 7}{2x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x} = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - x^2}{1 + x - 2x^2}$: On a une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". En factorisant par $(x - 1)$:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+2)}{-(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x+1} = \frac{1+2}{2(1)+1} = 1$.

c/ • $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{14 + 5x - x^2}{2x^3 + 2x^2 + 3x + 6}$: Forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". On factorise par $(x + 2)$:

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)(x-7)}{(x+2)(2x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x-7)}{2x^2 - 2x + 3} = \frac{-(-2-7)}{2(-2)^2 - 2(-2) + 3} = \frac{9}{8 + 4 + 3} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$: Forme indéterminée " $+\infty - \infty$ ". On utilise l'expression conjuguée :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0$.

d/ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} + 3x)$: Forme " $+\infty - \infty$ ". Attention, pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(9x^2 + 7) - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 7} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{-x\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{-x\left(\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}} + 3\right)} = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x-1)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x)-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x-1)(\sqrt{1+x}+1) = (-1)(2) = -2$.

e/ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 - 2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{3 - \frac{2}{x^2}} - 2 \right)$. Comme $\sqrt{3} - 2 < 0$, la limite vaut $-\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1-2x} - \sqrt{4-7x})$: Cette limite n'existe pas dans $\mathbb{R}$ car les fonctions sous les racines ne sont définies que pour $x \leq \frac{1}{2}$ et $x \leq \frac{4}{7}$. La limite en $+\infty$ n'a pas de sens mathématique ici.

f/ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x + 3) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x + 1)}{2x - \sqrt{4x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{2x + x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-1 - \frac{1}{x})}{x(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}})} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}.$

g/ • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (4x+3) = 7.$

• $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2-5x-14} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-7)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x-7} = -\frac{2}{9}.$

h/ • $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt{4x+1}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+5) - (4x+1)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{4x+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + \sqrt{4x+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5} + \sqrt{4x+1}} = 0.$

• $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x})}{(x+1) - (7-x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x})}{2(x-3)} = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{4}}{2} = 2.$

i/ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt{x^2+4}}{2x+1 - \sqrt{4x^2+1}}$: On multiplie le haut et le bas par leurs expressions conjuguées respectives :

Le numérateur devient : $4(1+x) - (x^2+4) = 4x - x^2 = x(4-x).$

Le dénominateur devient : $(2x+1)^2 - (4x^2+1) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 1 = 4x.$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4-x)}{4x} \times \frac{2x+1 + \sqrt{4x^2+1}}{2\sqrt{1+x} + \sqrt{x^2+4}} = \frac{4}{4} \times \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

• $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x}}{\sqrt{x^2+8} - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-3x) - (5+x)}{(x^2+8) - 9} \times \frac{\sqrt{x^2+8} + 3}{\sqrt{1-3x} + \sqrt{5+x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4(x+1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{3+3}{2+2} = \frac{-4}{-2} \times \frac{6}{4} = 3.$

j/ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1/2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = -\frac{1}{2}.$



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x \right)$: Pour $x \rightarrow -\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$. Par un développement limité similaire, on obtient $\frac{1}{2}$.

k/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)\sqrt{x^2-x} - 2x^2 + 5x - 3}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$: On factorise les termes dominants au numérateur et au dénominateur :

Le numérateur se comporte comme $2x^2 - 2x^2$, on utilise la quantité conjuguée ou un développement asymptotique pour trouver que la limite finale est $\frac{1}{2}$.

l/ • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x} + 1}$: En posant $u = \sqrt{x} \rightarrow 1$, on a $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 - 1}{\sqrt{u^2+3} - 3u + 1} = -\frac{9}{8}$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + x - 4}{1 - 2\sqrt{x} + x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(3x+4)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(3x+4)}{(\sqrt{x}-1)^2} = +\infty$.

m/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\sqrt{x^2+4x+2} - \sqrt{x^2+3x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x^2+4x+2} + \sqrt{x^2+3x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x} = +\infty$.

n/ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+\sin x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(\sqrt{4+\sin x} + 2)} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

• $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{4\sin^2 x - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{4(1 - \cos^2 x) - 3} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{1 - 4\cos^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{(1 - 2\cos x)(1 + 2\cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-1}{1 + 2\cos x} = -\frac{1}{2}$.

o/ • $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan x}{\cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x(\cos x - \sin x)}$
 $= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}))} = 1$.

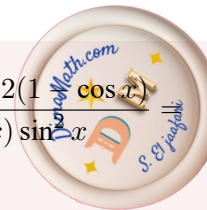
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (en posant $t = \frac{1}{x}$).

p/ • $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \left(\frac{2}{\sin(2x)} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \left(\frac{2}{2\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{(x - \pi) \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{(x - \pi) \sin x \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \times \frac{1}{\cos x} = (-1) \times (-1) = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \times \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \times \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

q/ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = 1$.

• $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos^2 x}{\sin x - \cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + (1 - \sin^2 x)}{\sin x - (1 - \sin^2 x) - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(2 + \sin x)}{(\sin x - 2)(\sin x + 1)} = -\infty$ (car le dénominateur s'annule en 0^-).



- r/** • $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 2(1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x) - 2(1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \sin^2 x}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(-1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos x}{\sin^2 x} = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos(2x)}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos(2x)})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - (2\cos^2 x - 1)}{2\sin^2 x} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$
- s/** • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) - \sin x}{\tan x + \sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(2x)}{x} - \frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\sin(2x)}{x}} = \frac{2 - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(2x)) \sin x}{\tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x \cdot \sin x}{\tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\cos^3 x = 2.$
- t/** • $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(1 - x^2)\sqrt{x^2 + 1} + 4}{x^2 - 3} = -\frac{7}{4}$ (en utilisant la quantité conjuguée ou la règle de L'Hôpital).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(1 + \sqrt{\cos x})}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \left(\frac{x^2}{1 - \cos x} \right) \cdot (1 + \sqrt{\cos x}) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$
- u/** • $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$ (par encadrement : $|x \sin(1/x)| \leq |x|$).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$ (car $x - 1 < E(x) \leq x$, théorème des gendarmes).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(2x)}{E(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2.$
- v/** • $\lim_{x \rightarrow 0^+} xE \left(\frac{1}{x} \right) = 1$ (en posant $X = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, revient à $\frac{E(X)}{X}$).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x E(x) - 5}{x^2 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} xE \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1.$
- w/** • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + E \left(\frac{1}{x} \right)}{x - E \left(\frac{1}{x} \right)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{X} + E(X)}{\frac{1}{X} - E(X)} = -1.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x \cos(x) + 3} = +\infty$ (car $x^2 - 2x + 3 \leq x^2 - 2x \cos x + 3$).

✓ Solution Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Détermination de l'ensemble de définition D_f :

Pour la branche $x \neq 0$, les expressions sous les racines carrées doivent être positives ou nulles. On pose



le système de conditions suivant :

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

Comme la fonction est explicitement définie en $x = 0$ par $f(0) = 0$, on inclut la valeur 0 dans l'ensemble final.

$$D_f = ([-1; 1] \setminus \{0\}) \cup \{0\} = [-1; 1]$$

2/ Étude de la continuité de f en $x_0 = 0$:

La fonction f est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Calculons la limite lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x}$$

On obtient une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ". Pour lever l'indétermination, on regroupe les termes pour faire apparaître des expressions conjuguées distinctes :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - 1) + (\sqrt{1-x} - 1)}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

Multiplions chaque fraction par sa quantité conjuguée respective :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \frac{(1-x) - 1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} \end{aligned}$$

On réassemble l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{1-x} + 1}$$

On peut maintenant passer à la limite sans indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} - \frac{1}{\sqrt{1-0} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, la fonction f est bien **continue** en $x_0 = 0$.

3/ Étude de la continuité de f sur D_f

a/ Sur les intervalles $[-1; 0[$ et $]0; 1]$:

Pour tout $x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$, la fonction est définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x}$$

- Les fonctions associées à $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto 1-x$ sont des fonctions affines, donc continues sur $\mathbb{R}$.
- Par composition avec la fonction racine carrée, les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sont continues sur leurs domaines de définition respectifs, soit sur $[-1; +\infty[$ et $]-\infty; 1]$.
- Par somme, le numérateur $x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2$ est continu sur $[-1; 1]$.



- Enfin, par quotient avec la fonction linéaire $x \mapsto x$ (qui est continue et ne s'annule pas sur $[-1; 0[$ et $]0; 1]$), la fonction f est continue sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$.

b/ En $x_0 = 0$:

D'après l'étude locale précédente, nous avons établi que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

La fonction f est donc également continue en 0.

Conclusion : Puisque la fonction f est continue sur $[-1; 0[$, en 0, et sur $]0; 1]$, on en déduit par recollement que f est continue sur tout son ensemble de définition $D_f = [-1; 1]$ (et en particulier, continue à droite en -1 et à gauche en 1).

✓ Solution Exercice 3

a) La fonction g définie par : $g(x) = \frac{|x-2|+1}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc définie en $x_0 = 2$. Il suffit de calculer $f(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

- Calcul de l'image : $g(2) = \frac{|2-2|+1}{2^2+1} = \frac{0+1}{4+1} = \frac{1}{5}$
- Calcul de la limite : Quand $x \rightarrow 2$, l'expression $|x-2|$ tend vers 0. Par substitution directe :

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{0+1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

Conclusion : Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$, la fonction g est continue en $x_0 = 2$.

b) $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2} & ; x \neq 3 \\ g(3) = 3 \end{cases}$ On a une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ " en $x = 3$. Utilisons la quantité conjuguée du dénominateur :

- Simplification de l'expression :

$$g(x) = \frac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} = \frac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$

Pour $x \neq 3$, on simplifie par $(x-3)$:

$$g(x) = x(\sqrt{x+1}+2)$$

- Calcul de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 3 \times (\sqrt{3+1}+2) = 3 \times (2+2) = 12$$

Conclusion : On a $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 12 \neq g(3)$ (car $g(3) = 3$). La fonction g n'est pas continue en $x_0 = 3$.

c) $\begin{cases} g(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & ; x < 0 \\ g(0) = 0 \\ g(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & ; x > 0 \end{cases}$. Puisque la fonction change d'expression autour de 0, étudions les limites à gauche et à droite.



- Limite à gauche ($x \rightarrow 0^-$) : Par définition de la partie entière, pour tout réel u , on a : $u - 1 < E(u) \leq u$. En posant $u = \frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

Comme $x < 0$, on a $x^2 > 0$. Multiplions l'inégalité par x^2 :

$$x^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \left(\frac{1}{x} \right) \Rightarrow x - x^2 < g(x) \leq x$$

Quand $x \rightarrow 0^-$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x - x^2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$.

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$. Donc g est continue à gauche en 0.

- Limite à droite ($x \rightarrow 0^+$) : Quand x est très proche de 0 à droite (précisément pour $0 < x < 1$), on a $E(x) = 0$. L'expression de g devient :

$$g(x) = \frac{x - 0}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Calculons la limite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. Donc g est continue à droite en 0.

Conclusion : Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$. Alors la fonction g est continue en $x_0 = 0$.

d) $\begin{cases} g(x) = \frac{1 - \cos^3 x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ g(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$. Utilisons l'identité remarquable $1 - u^3 = (1 - u)(1 + u + u^2)$ avec $u = \cos x$:

- Transformation de l'expression :

$$g(x) = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x^2} = \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \times (1 + \cos x + \cos^2 x)$$

- Calcul de la limite : On sait d'après les limites usuelles trigonométriques que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 1 + 1 + 1^2 = 3$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Conclusion : On a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = \frac{3}{2}$, donc la fonction g est continue en $x_0 = 0$.

e) $\begin{cases} g(x) = x - 1 + \cos(\pi x) & ; x \leq 2 \\ g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & ; x > 2 \end{cases}$. Étudions séparément la valeur à gauche (qui donne aussi l'image) et la limite à droite en 2.

- Image et limite à gauche ($x \rightarrow 2^-$) :

$$g(2) = 2 - 1 + \cos(2\pi) = 1 + 1 = 2$$

Par continuité de la fonction affine et du cosinus, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2) = 2$.

- Limite à droite ($x \rightarrow 2^+$) : On a une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Factorisons le numérateur $x^2 - 3x + 2$. Ses racines évidentes sont 1 et 2, donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Pour $x > 2$:

$$g(x) = \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = x - 1$$

Calculons la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 2 - 1 = 1$$

Conclusion : Puisque $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$, les limites à gauche et à droite sont différentes. La fonction g n'est pas continue en $x_0 = 2$ (elle présente une discontinuité de première espèce / un saut).

✓ Solution Exercice 4

Pour qu'une fonction f soit continue en un point x_0 , il faut et il suffit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 soit égale à $f(x_0)$ c-à-d :

$$x_0 \in D_f \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + ax}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$
 . On a alors $x_0 = 2$ et $f(2) = 4$

4. On cherche a tel que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax}{x - 2} = 4$.

1. Condition de levée de l'indétermination : Le dénominateur s'annule en $x = 2$. Pour que la limite soit finie (égale à 4), le numérateur doit également s'annuler en $x = 2$.

$$2(2)^2 + a(2) = 0 \implies 8 + 2a = 0 \implies 2a = -8 \implies a = -4$$

2. Vérification : Si $a = -4$, la fonction devient :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \frac{2x(x - 2)}{x - 2} = 2x \quad (\text{pour } x \neq 2)$$

Calculons la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$$

La limite est bien égale à $f(2)$.

Conclusion : $a = -4$

- b) La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} & ; \quad x \in [0; 2[\cup]2; +\infty[\\ f(2) = a \end{cases}$$

On a alors $x_0 = 2$ et $f(2) = a$. On cherche a tel que $a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$. C'est une forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ ". Nous allons multiplier le numérateur et le dénominateur par leurs expressions conjuguées respectives :

$$\frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x+7} + 3)}$$

En appliquant l'identité remarquable $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$:

$$= \frac{((x+7) - 9)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x+7} + 3)}$$



En simplifiant par $(x - 2)$ pour $x \neq 2$:

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+7} + 3}$$

Maintenant, on calcule la limite en 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+7} + 3} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{9} + 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3+3} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Conclusion : $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$

c) La fonction f est définie sur $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+5}-5}{x-10} & ; \quad x \in \left[-\frac{5}{2}, 10[\cup]10, +\infty[\right] \\ f(10) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

On a $x_0 = a$ et $f(10) = \frac{1}{5}$. Attention, ici la fonction est définie et continue sur tout son domaine sauf potentiellement en $x = 10$. On nous donne explicitement la valeur de la fonction en 10 qui vaut $\frac{1}{5}$. Pour que f soit continue en $x_0 = a$, étudions d'abord la continuité globale de la fonction au point charnière visible, c'est-à-dire en $x = 10$. Calculons la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 10$:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{2x+5}-5}{x-10}$$

Multiplions par l'expression conjuguée du numérateur :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(\sqrt{2x+5}-5)(\sqrt{2x+5}+5)}{(x-10)(\sqrt{2x+5}+5)} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(2x+5)-25}{(x-10)(\sqrt{2x+5}+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2x-20}{(x-10)(\sqrt{2x+5}+5)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)}{(x-10)(\sqrt{2x+5}+5)} \end{aligned}$$

En simplifiant par $(x - 10)$:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{2}{\sqrt{2x+5}+5} = \frac{2}{\sqrt{25}+5} = \frac{2}{5+5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = f(10) = \frac{1}{5}$, la fonction f est prolongée par continuité et est donc continue en tout point de son domaine de définition (sur $[-\frac{5}{2}; +\infty[$). Par conséquent, la fonction est continue en n'importe quelle valeur réelle appartenant à son domaine.

Conclusion : $a \in [-\frac{5}{2}; +\infty[$

✓ Solution Exercice 5

1/ Prolongement par continuité de f en 0



La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \sin(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour tout réel $x \neq 0$, la fonction sinus est bornée :

$$0 \leq \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

En multipliant cette inégalité par $|\sin(x)|$ (qui est positif ou nul), on obtient l'encadrement suivant :

$$0 \leq |\sin(x)| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |\sin(x)|$$

Donc :

$$0 \leq |f(x)| \leq |\sin(x)|$$

Or, nous savons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| = 0$$

D'après le **théorème des gendarmes**, on en déduit immédiatement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

La limite en 0 étant finie, la fonction f admet un prolongement par continuité en 0 par la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \sin(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

2/ Prolongement par continuité de g en $x_0 = 4$

La fonction g est définie sur $[0; 4[\cup]4; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x} - 5}{x-4}$$

L'évaluation directe en $x = 4$ mène à la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever cette indétermination, séparons habilement le numérateur en deux blocs :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4} + \frac{\sqrt{x} - 2}{x-4}$$

Étudions la limite de chaque bloc en multipliant par leurs expressions conjuguées respectives :

• **Premier bloc :**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4} &= \frac{(\sqrt{x+5} - 3)(\sqrt{x+5} + 3)}{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{(x+5) - 9}{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)} \\ &= \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+5} + 3} \quad (\text{pour } x \neq 4) \end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{4+5} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$



• **Second bloc :**

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad (\text{pour } x \neq 4)$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Par somme des deux limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

La limite en 4 étant finie, la fonction g admet un prolongement par continuité en $x_0 = 4$ la fonction $\tilde{g}$ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) = \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x} - 5}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ \tilde{g}(4) = \frac{5}{12} \end{cases}$$

✓ **Solution Exercice 6**

On rappelle que la fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$$

1/ **Détermination de l'ensemble de définition D_h**

La fonction h est définie si et seulement si son dénominateur est non nul, c'est-à-dire :

$$x + E(x) \neq 0 \iff E(x) \neq -x$$

Analysons cette équation selon les valeurs de x :

- Si $x = 0$: $E(0) = 0$, donc $0 + 0 = 0$. La valeur $x = 0$ est donc interdite.
- Si $x > 0$: Par définition de la partie entière, $E(x) > 0$. Donc $x + E(x) > 0$ par conséquent $x + E(x) \neq 0$
- Si $x < 0$: Par définition, la partie entière $E(x) < 0$, donc $x + E(x) < 0$ par conséquent $x + E(x) \neq 0$

Ainsi, la seule solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x + E(x) = 0$ est 0. D'où :

$$D_h = \mathbb{R}^*$$

2/ a) **Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$**

Lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, prenons $x \in]0; 1[$, on a par définition de la partie entière : $E(x) = 0$. Donc

$$h(x) = \frac{x-0}{x+0} = \frac{x}{x} = 1$$

Par conséquent, on a bien :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$



b) **Prolongement par continuité en 0 de h**

Pour étudier l'existence d'un prolongement par continuité en 0, déterminons la limite à gauche de h en 0. Soit $x \in]-1; 0[$, on a par définition : $E(x) = -1$. Donc :

$$h(x) = \frac{x - (-1)}{x + (-1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Calculons la limite à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$, la fonction h n'admet pas de limite unique en 0. Alors la fonction h **n'admet pas de prolongement par continuité en 0**.

3/ **Limites à l'infini**

Pour étudier les limites à l'infini, utilisons l'encadrement fondamental de la partie entière :

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

Pour tout $x \neq 0$, on peut factoriser par x au numérateur et au dénominateur :

$$h(x) = \frac{x \left(1 - \frac{E(x)}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{E(x)}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{E(x)}{x}}{1 + \frac{E(x)}{x}}$$

- **En $+\infty$** : En divisant l'encadrement par $x > 0$, on obtient $\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

- **En $-\infty$** : En divisant l'encadrement par $x < 0$ donc $\frac{x-1}{x} > \frac{E(x)}{x} \geq 1$ et en appliquant de la même manière le théorème des gendarmes que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

✓ **Solution Exercice 7**

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

- 1/ a/ **Montrons que** $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); f(x) \geq \frac{1}{x}$

Comme la fonction sinus est bornée par -1 et 1 sur $\mathbb{R}$, alors on a : Pour tout réel non nul x ,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$



En multipliant par -1 , on inverse le sens des inégalités :

$$-1 \leq -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

En ajoutant 2 à chaque membre de l'inégalité, on obtient :

$$2 - 1 \leq 2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 + 1 \implies 1 \leq 2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3$$

Comme $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $x > 0$. On peut donc diviser chaque membre par x sans changer le sens des inégalités :

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \leq \frac{3}{x}$$

Ainsi :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) ; f(x) \geq \frac{1}{x}$$

b/ **Déduisons-en** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Nous savons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

D'après le **théorème de comparaison par minoration**, puisque $f(x) \geq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, on conclut immédiatement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

2/ a/ **Montrons que** $(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}) ; f(x) \leq \frac{1}{x}$

On a montré que pour tout $x \neq 0$:

$$1 \leq 2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 3$$

Puisque $x \in \mathbb{R}^{-*}$, on a $x < 0$. En divisant chaque membre par un nombre strictement négatif, le sens des inégalités est inversé :

$$\frac{1}{x} \geq \frac{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \geq \frac{3}{x} \implies \frac{3}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

En ne conservant cette fois-ci que l'inégalité de droite, on obtient :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{-*}) ; f(x) \leq \frac{1}{x}$$

b/ **Déduisons-en** $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Nous savons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

D'après le **théorème de comparaison par majoration**, puisque $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x < 0$, on conclut immédiatement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Solution Exercice 8

1) $f(x) = x^2 + x + 1$; $I = [-1; 3]$

- **Continuité** : f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier continue sur l'intervalle $I = [-1; 3]$.
- **Variations** : f est dérivable sur I et pour tout $x \in [-1; 3]$:

$$f'(x) = 2x + 1$$

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2} \in [-1; 3]$, la fonction f est strictement décroissante sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

- **Image de l'intervalle I** : Le minimum absolu est atteint en $x = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

Aux bornes de l'intervalle, on a :

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 \quad \text{et} \quad f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

L'image de l'intervalle est bornée par le minimum global et le maximum des deux extrémités :

$$f(I) = \left[\frac{3}{4}; 13\right]$$

2) $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$; $I =]-2; 2]$

- **Continuité** : f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Puisque la valeur interdite $-2 \notin I$, f est continue sur l'intervalle $I =]-2; 2]$.
- **Variations** : f est dérivable sur I et pour tout $x \in]-2; 2]$:

$$f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x-4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$$

La dérivée étant strictement positive, f est strictement croissante sur I .

- **Image de l'intervalle $f(I)$** : Par stricte croissance et continuité :

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-4}{x+2} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

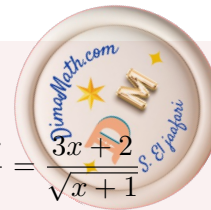
$$f(2) = \frac{2-4}{2+2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit l'intervalle image :

$$f(I) = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right]$$

3) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$; $I = [0; 3[$

- **Continuité** : La fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[-1; +\infty[$. Par produit, f est continue sur l'intervalle $I = [0; 3[$.



- **Variations :** f est dérivable sur $]0; 3[$ et pour tout $x \in]0; 3[$:

$$f'(x) = 2\sqrt{x+1} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1) + x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$$

Pour tout $x \in [0; 3]$, $3x+2 > 0$ et $\sqrt{x+1} > 0$, donc $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur I .

- **Image de l'intervalle $f(I)$:** Par stricte croissance et continuité :

$$f(0) = 2(0)\sqrt{0+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2(3)\sqrt{3+1} = 6 \times 2 = 12$$

On obtient ainsi :

$$f(I) = [0; 12[$$

4) $f(x) = 1 + 2 \sin x + \frac{x}{3} \quad ; \quad I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$

- **Continuité :** f est la somme d'une fonction constante, d'une fonction trigonométrique et d'une fonction affine toutes continues sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur I .
- **Variations :** f est dérivable sur I et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$:

$$f'(x) = 2 \cos x + \frac{1}{3}$$

Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$, on a $\cos x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$, ce qui implique $\cos x > 0$. Ainsi, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur I .

- **Image de l'intervalle $f(I)$:** Par stricte croissance :

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{-\frac{\pi}{6}}{3} = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{18} = 1 - 1 - \frac{\pi}{18} = -\frac{\pi}{18}$$

$$f(0) = 1 + 2 \sin(0) + \frac{0}{3} = 1$$

On en déduit l'intervalle image :

$$f(I) = \left[-\frac{\pi}{18}; 1\right]$$

5) $\begin{cases} f(x) = x + 2 & ; x \leq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x > 1 \end{cases} \quad ; \quad I = [-3; 2]$

- **Continuité :**

- Sur $[-3; 1[$, f est une fonction affine, donc continue.
- Sur $]1; 2]$, f est une fonction polynomiale, donc continue.
- Étudions la continuité au point de jonction $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2) = 3(1)^2 = 3$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, la fonction f est bien **continue en 1**, et donc continue sur tout l'intervalle $I = [-3; 2]$.



• **Variations :**

- Sur $[-3; 1]$, la pente de la fonction affine est $1 > 0$, donc f est strictement croissante.
- Sur $]1; 2]$, la dérivée est $f'(x) = 6x$. Comme $x > 1$, $f'(x) > 0$, donc f est également strictement croissante.

La fonction f étant continue sur $[-3; 2]$ et strictement croissante sur chacun des sous-intervalles, elle est **globalement strictement croissante** sur I .

• **Image de l'intervalle $f(I)$:** Par stricte croissance globale et continuité :

$$f(-3) = -3 + 2 = -1 \quad \text{et} \quad f(2) = 3(2)^2 = 12$$

On en déduit l'intervalle image de manière directe :

$$f(I) = [-1; 12]$$

✓ **Solution Exercice 9**

Méthode : Pour montrer qu'une équation admet au moins une solution sur un intervalle $[a; b]$, on transforme l'équation sous la forme $f(x) = 0$, puis on vérifie deux conditions du **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)** :

- La fonction f est continue sur $[a; b]$.
- Le nombre 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que $f(a) \times f(b) \leq 0$.

1) **Équation :** $x^4 + x^2 + 2x - 1 = 0$; $I = [0; 1]$

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x^4 + x^2 + 2x - 1$.

- **Continuité :** f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier continue sur l'intervalle $[0; 1]$.
- **Calcul des images aux bornes :**

$$f(0) = 0^4 + 0^2 + 2(0) - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1^4 + 1^2 + 2(1) - 1 = 1 + 1 + 2 - 1 = 3 > 0$$

Puisque f est continue sur $[0; 1]$ et que $f(0) \times f(1) < 0$ (le signe change), d'après le **TVI**, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$. Par conséquent l'équation $x^4 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans I .

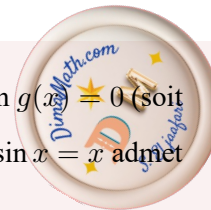
2) **Équation :** $2 \sin x = x$; $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

Ramenons l'équation à zéro en définissant la fonction g sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ par : $g(x) = 2 \sin x - x$.

- **Continuité :** g est la différence d'une fonction trigonométrique ($2 \sin x$) et d'une fonction affine (x) toutes deux continues sur $\mathbb{R}$. Donc g est continue sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
- **Calcul des images aux bornes :**

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 1,73 - 1,05 = 0,68 > 0$$

$$g(\pi) = 2 \sin(\pi) - \pi = 2(0) - \pi = -\pi < 0$$



Puisque g est continue sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ et que $g\left(\frac{\pi}{3}\right) \times g(\pi) < 0$, d'après le **TVI**, l'équation $g(x) = 0$ (soit $2 \sin x = x$) admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$. Donc l'équation $2 \sin x = x$ admet au moins une solution dans I .

3) **Équation** : $x^2 - 5\sqrt{x} = -1$; $I = [1; 4]$

Ramenons l'équation à zéro en définissant la fonction h sur $[1; 4]$ par : $h(x) = x^2 - 5\sqrt{x} + 1$.

- **Continuité** : $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $x \mapsto -5\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Par somme, h est continue sur l'intervalle $[1; 4]$.
- **Calcul des images aux bornes** :

$$h(1) = 1^2 - 5\sqrt{1} + 1 = 1 - 5 + 1 = -3 < 0$$

$$h(4) = 4^2 - 5\sqrt{4} + 1 = 16 - 5(2) + 1 = 16 - 10 + 1 = 7 > 0$$

Puisque h est continue sur $[1; 4]$ et que $h(1) \times h(4) < 0$, d'après le **TVI**, l'équation $h(x) = 0$ (soit $x^2 - 5\sqrt{x} = -1$) admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 4]$. Donc l'équation $x^2 - 5\sqrt{x} = -1$ admet au moins une solution dans I .

✓ Solution Exercise 10

Méthode : Pour montrer qu'une équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α sur un intervalle I , on applique le corollaire du TVI en vérifiant que :

- f est continue sur I .
- f est strictement monotone (strictement croissante ou décroissante) sur I .
- 0 appartient à l'intervalle image $f(I)$ (ou change de signe aux bornes si l'intervalle est fermé).

1) **Équation** : $x^5 + x^2 + 2 = 0$; $I = [-2; -1]$

Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = x^5 + x^2 + 2$.

- **Continuité** : f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $[-2; -1]$.
- **Monotonie** : f est dérivable sur I et pour tout $x \in [-2; -1]$:

$$f'(x) = 5x^4 + 2x = x(5x^3 + 2)$$

Comme $x \in [-2; -1]$, on a $x < 0$ et $x^3 \leq -1$, d'où $5x^3 + 2 \leq -3 < 0$. Par produit de deux facteurs négatifs, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc **strictement croissante** sur $[-2; -1]$.

- **Signe aux bornes** :

$$f(-2) = (-2)^5 + (-2)^2 + 2 = -32 + 4 + 2 = -26 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^5 + (-1)^2 + 2 = -1 + 1 + 2 = 2 > 0$$

Puisque f est continue, strictement croissante sur $[-2; -1]$ et que $0 \in [f(-2); f(-1)]$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $x^5 + x^2 + 2 = 0$ admet une **unique** solution α dans $[-2; -1]$.

2) **Équation** : $x^4 + 2x = 5$; $I = [1; +\infty[$

Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = x^4 + 2x - 5$.

- **Continuité** : g est continue sur $[1; +\infty[$ (fonction polynomiale).



- **Monotonie** : g est dérivable sur I et pour tout $x \geq 1$:

$$g'(x) = 4x^3 + 2$$

Comme $x \geq 1$, $4x^3 + 2 \geq 6 > 0$. La fonction g est donc **strictement croissante** sur $[1; +\infty[$.

- **Intervalle image** $g(I)$:

$$g(1) = 1^4 + 2(1) - 5 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 + \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^4} \right) = +\infty$$

Par continuité et stricte croissance, $g(I) = [-2; +\infty[$.

Comme $0 \in [-2; +\infty[$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ (soit $x^4 + 2x = 5$) admet une **unique** solution α dans $[1; +\infty[$.

3) Équation : $1 + 2 \sin x = -3x$; $I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$

Soit h la fonction définie sur I par : $h(x) = 2 \sin x + 3x + 1$.

- **Continuité** : h est la somme de fonctions continues (trigonométrique et affine), elle est donc continue sur l'intervalle donné.
- **Monotonie** : h est dérivable sur I et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$:

$$h'(x) = 2 \cos x + 3$$

On sait que pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$, d'où $1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5$. La dérivée $h'(x)$ est strictement positive, la fonction h est donc **strictement croissante** sur $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$.

- **Signe aux bornes** :

$$h\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 = -1 - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} < 0$$

$$h(0) = 2 \sin(0) + 3(0) + 1 = 1 > 0$$

Puisque h est continue, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$ et change de signe aux bornes ($h(-\pi/6) \times h(0) < 0$), l'équation $1 + 2 \sin x = -3x$ admet une **unique** solution α dans cet intervalle.