



Sujet 11



Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{8}{5}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{5u_n + 11}$ pour tout entier naturel n .

1/ Calculer u_1 .

2/ Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n .

3/ a) Montrer que $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{11}u_n$ puis déduire que pour tout entier naturel n

$$0 < u_n \leq \frac{8}{5} \left(\frac{3}{11} \right)^n.$$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \frac{5u_n}{5u_n + 8}$ pour tout entier naturel n .

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{11}$.

b) Écrire v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n .

Exercice 2

On considère une urne contenant 2 boules blanches ; 3 boules rouges et 2 boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne.

1/ Soit les évènements suivants :

A : les deux boules tirées sont de même couleur

B : parmi les deux boules tirées il existe au moins une boule rouge

a) montrer que $p(A) = \frac{5}{21}$

b) calculer $p(B)$

c) montrer que $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$

d) Est-ce que A et B sont indépendants ? justifier votre réponse

- 2/ Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules rouges tirées.
- Déterminer les valeurs prises par X et calculer $p(X = 2)$.
 - donner la loi de probabilité et calculer $E(X)$ l'Espérance mathématique de X .

Exercice 3

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{6})z + 16 = 0$$

- Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$.
 - Déduire les solutions de l'équation (E) .
- Soit les nombres complexes $a = \sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

 - Vérifier que $4b = ac$
 - Écrire les nombres complexes b et c sous la forme trigonométrique
 - En déduire que $a = 4 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points B, C et D d'affixes respectives b , c et d telle que $d = a^4$.

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{7\pi}{12}$

 - Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$
 - Déterminer l'image du point C par la rotation R.
 - Déterminer la nature du triangle OBC.
 - Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 4

Première partie :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x + (2 - x) \ln(x).$$

- Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
- Montrer que $g'(x) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

- b) Vérifier que $\frac{1}{x} - 1 \leq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[1; +\infty[$ puis déduire que g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- c) Vérifier que $\frac{1}{x} - 1 \geq 0$ pour tout x dans l'intervalle $]0; 1]$ puis déduire que g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1]$.
- d) Dresser le tableau des variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3/ Calculer $g(1)$.

4/ Déduire que $g(x) < 0$ pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Deuxième partie :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

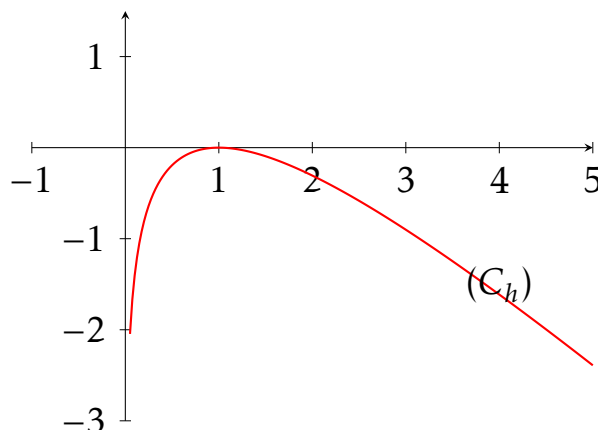
$$f(x) = -x \ln(x) + \ln^2(x)$$

et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité : 2cm).

- 1/ a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ puis étudier la branche infinie de (C) . au voisinage de $+\infty$.
- 2/ a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b) Déduire que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- c) Dresser le tableau des variations de f .
- 3/ a) Montrer que l'équation de la droite (D) tangente à (C) au point $A(1; 0)$ est $y = -x + 1$.
- b) Vérifier que $f(x) - y = (\ln(x) - 1)(-x + \ln(x) + 1)$ pour tout x dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
- c) Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = -x + \ln(x) + 1$$

et soit (C_h) la courbe de h dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (voir figure si dessous)



Montrer que (C) est au-dessus de la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ sur l'intervalle $]0, e[$ et (C) est au-dessous de la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ sur l'intervalle $[e; +\infty[$.

- 4) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère orthonormé (on admet que (C) admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 1 et 1,5).
- 5) Soit T la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $T(x) = f(x)$
 - a) Montrer que la fonction T admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Montrer que T^{-1} est dérivable en 0.

Troisième partie

1/ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

2/ Vérifier que la fonction $\mathbf{K} : x \mapsto x(\ln^2(x) - 2 \ln(x) + 2)$ est une fonction primitive de $\mathbf{Q} : x \mapsto \ln^2(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3/ Dédurre $\int_1^e \ln^2(x) dx$.

4/ Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

FIN