



Série 4

Dérivation et ses applications

2 BIOF PC et SVT S. EL JAAFARI



Exercice 1

On considère la fonction f , définie par son tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-4	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	$-\infty$	2	$-\infty$

Et vérifiant les conditions suivantes :

- $f(-6) = 2$ et $f(-5) = -1$ et $f(-2) = -4$.
- $f(0) = 0$ et $f(4) = -1$ et $f(5) = -4$.
- (C_f) admet une tangente horizontale au point -4 .
- (C_f) admet une demi-tangente horizontale à gauche au point 3 . (C_f) admet une demi-tangente verticale à droite au point 3 .
- (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $-\infty$, et admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.
- La droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 .

- 1/ Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
- 2/ Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3/ Déterminer $f([-\infty, -4])$ et $f([0, 4])$ et $f([3, +\infty[)$.
- 4/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -6, -5[$.
- 5/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]3, 4[$.
- 6/ Déterminer graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 0$.
- 7/ Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.



8/ Discuter suivant les valeurs du nombre réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

9/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

10/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Justifier.

11/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) + 2}{x + 4}$. Justifier.

12/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - 2}{x - 3}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - 2}{x - 3}$. Justifier.

13/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. Justifier.

Exercice 2

Partie I :

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x - 3 + 4\sqrt{x + 2}$$

- 1/ a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 2/ Étudier la dérivabilité de g à droite en -2 et interpréter géométriquement le résultat.
- 3/ a) Montrer que g est dérivable sur $] -2; +\infty[$.
b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in] -2; +\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de g .
- 4/ Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie II :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x + 7}{\sqrt{x + 2} + 2}$$

et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1/ a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2/ a) Étudier la dérivabilité de f en -2 à droite et interpréter géométriquement le résultat.
b) Montrer que f est dérivable sur D'_f .
c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D'_f$.
d) Dresser le tableau de variation de f .



Exercice 3



On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}$$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2/ (a) Montrer que :

$$(\forall x > 1); \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

(b) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ Montrer que :

$$(\forall x > 1); \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

4/ Donner le tableau de variation de f .

5/ Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.



Exercice 4

Partie 1 :

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

1/ Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 6(1 - 2\sqrt{x})$$

2/ Dresser le tableau de variations de g .

3/ En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$: $g(x) \leq 0$.

Partie 2 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Et interpréter le résultat graphiquement.



3/ a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

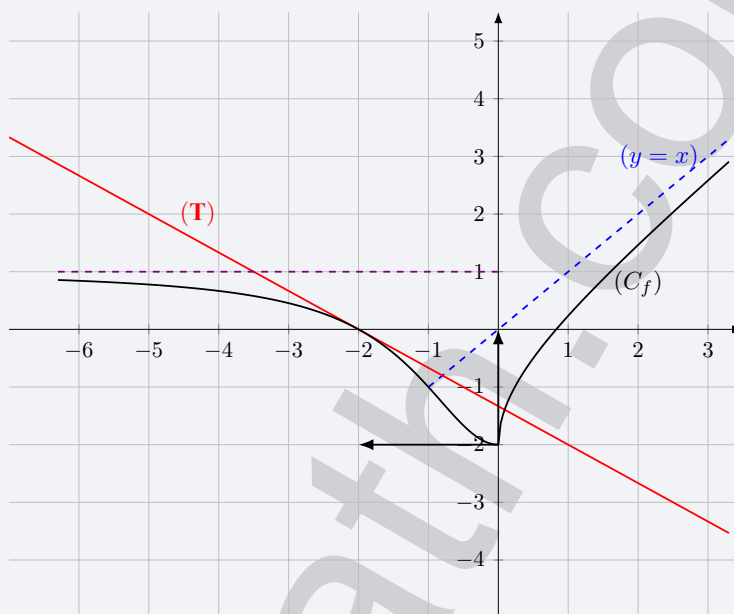
$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4/ Calculer $f(1)$ et tracer la courbe (C_f) .

Exercice 5

I - Dans le graphique ci-contre (C_f) , est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1/ Par lecture graphique déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad f(0); \quad f'_d(0); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) + 2}{x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x).$$

2/ La droite (T) passe-t-elle par le point $A \left(18, -\frac{40}{3} \right)$? Justifier.

II - On suppose dans la suite, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} & \text{Si : } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4x} - 2 & \text{Si : } x \geq 0 \end{cases}$$

1/ Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

2/ a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 0[$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$$



- 3/ a) Donner l'équation de la tangente (T_1) à (C_f) au point d'abscisse 1.
b) Existe-t-il une tangente à (C_f) parallèle à la droite d'équation $y = x$?

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- 2/ a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = x + \frac{4}{x - 1}$.
b) En déduire que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
c) Déterminer la position relative de (Δ) et (C_f) .
d) Construire (Δ) et (C_f) .

- 3/ Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

- 4/ Soit la fonction g définie par $g(x) = f(2 - x)$.

- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $g(x) = 2 - f(x)$.
b) Tracer (C_g) à partir de (C_f) .

- 5/ On considère la fonction g définie par : $g(x) = a\sqrt{x} + b$ où a et b sont deux réels données. La droite $\Delta' : y = x - 3$ est tangente à (C_g) au point d'abscisse 1.

- a) Déterminer a et b .
b) Donner une valeur approchée de $g(1,001)$.

- 6/ Dans la suite on prend $a = 2$ et $b = -4$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ h(x) = g(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que h est continue en 0.
b) Étudier la dérivabilité de h à droite et à gauche en 0.
c) Dresser le tableau de variation de h .



Exercice 7



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x - 1$$

- 1/ Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.
- 2/ Justifier la continuité de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 3/ a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \sqrt{x} - 1$$
 b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$, puis dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
- 4/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$ et vérifier que $3 < \alpha < 4$.
- 5/ a) En utilisant une calculatrice, calculer $f(3.6)$ et $f(3.7)$. En déduire un encadrement de α d'amplitude 0.1.
b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 6/ a) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Calculer $g(4)$. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ et calculer $(g^{-1})' \left(\frac{1}{3} \right)$.



Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 5}; & x \leq 2 \\ f(x) = x - 1 + 2\sqrt{x - 2}; & x > 2 \end{cases}$$

- 1/ a) Montrer que $(\forall x \leq 2); f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2 + 1}$ et $(\forall x > 2); f(x) = (\sqrt{x-2} + 1)^2$.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2/ Étudier la continuité de f en $x_0 = 2$.
- 3/ Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- 4/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x - 3}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 5/ Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 3.
- 6/ a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.
b) Montrer que $(\forall x \in] -\infty; 2]) : f'(x) = \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 5)^2}}$
c) Montrer que f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.
d) Dresser le tableau de variation de f .



7/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 2]$.

- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$.
- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
- Montrer que g^{-1} est dérivable en α .
- Montrer que $(g^{-1})'(\alpha) = \frac{3\alpha^2}{2(\alpha - 2)}$.
- Montrer que : $(\forall x \in J) : g^{-1}(x) = -\sqrt{x^3 - 1} + 2$.

Exercice 9

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

- Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
 - Trouver les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.
- Montrer que (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
 - Étudier les positions relatives de (C_f) et la droite (Δ) .
- Étudier la dérivabilité de g en 0 à droite et interpréter le résultat graphiquement. (Remarque : il s'agit de la dérivabilité de f en 1 à droite, d'après l'expression de f).
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$, puis dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $2\sqrt{2} < \alpha < \frac{27}{8}$.
- Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$.
 - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - Montrer que : $g^{-1}(6) = 8$.
 - Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable au point $y_0 = 6$.
 - Calculer $(g^{-1})'(6)$.
- Tracer (C_f) , $(C_{g^{-1}})$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.