



Devoir surveillé n°1

Modèle 1

2 BAC SM

S. EL JAAFARI



Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{2x^2 - x - 1}}{1 - x^2}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\arctan \sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 + x} - 2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \frac{\pi}{2}}{x}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3x} - 2\sqrt[3]{x^3 + 1}.$



Exercice 2

On pose : $x = \arctan(\sqrt{2})$.

1/ Vérifier que : $0 < \pi - 2x < \frac{\pi}{2}$.

2/ Calculer $\tan(\pi - 2x)$ puis en déduire que :

$$\arctan(2\sqrt{2}) + 2\arctan(\sqrt{2}) = \pi$$



Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f .

2/ Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3/ La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?



Exercice 4

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \arctan(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$$

1/ Montrer que la fonction g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

2/ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\exists! \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]) : x = (\tan \theta)^2$.

3/ a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : g(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})$.

b) Déterminer l'expression de g^{-1} la fonction réciproque de g .



Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction numérique h_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h_n(x) = x^n + \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction h_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Montrer que l'équation $h_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

2/ Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$.

3/ a) Étudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) sur l'intervalle $]0, 1[$.

b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

e) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - (u_n)^n)$.