



Modèle 1

Devoir surveillé n°1



1 SECO

S. EL JAAFARI



I– Énoncés des exercices



Exercice 1

1/ Donner la négation puis la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}), \quad x^2 + 1 > 0$
- $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}), \quad x^2 - 3x + 2 = 0$

2/ En utilisant le raisonnement par **contraposition**, montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{Si } x \neq y, \text{ alors } 2x + 3 \neq 2y + 3$$

3/ En utilisant le raisonnement par **l'absurde**, montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4/ En utilisant le raisonnement par **récence**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Exercice 2

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1) : 2x^2 - 5x + 3 = 0$
- $(E_2) : -x^2 + 4x - 4 = 0$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante (en s'aidant d'un tableau de signes) :

- $(I_1) : 2x^2 - 5x + 3 \leq 0$

3/ Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

- Vérifier que 1 est une racine de $P(x)$.
- En déduire la factorisation de $P(x)$ sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$ puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.



Exercice 3



1/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire suivant en utilisant la méthode des déterminants (Cramer)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

2/ **Application économique :**

Un commerçant achète deux types de calculatrices pour sa boutique. Le premier type coûte 30 DH l'unité et le second coûte 20 DH l'unité. Il a acheté au total 40 calculatrices pour un montant global de 1050 DH.

- En posant x le nombre de calculatrices du premier type et y le nombre de calculatrices du second type, traduire ce problème sous forme d'un système d'équations.
- Résoudre le système pour trouver le nombre de calculatrices de chaque type.



II– Corrigés de exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ Négations et valeurs de vérité :

$$\bullet \overline{P_1} : (\exists x \in \mathbb{R}), \quad x^2 + 1 \leq 0.$$

La proposition P_1 est **Vraie** car pour tout réel x , $x^2 \geq 0 \implies x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

$$\bullet \overline{P_2} : (\forall x \in \mathbb{R}), \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0.$$

La proposition P_2 est **Vraie** car pour $x = 1$, $1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

2/ Raisonnement par contraposition :

Montrons que si $2x + 3 = 2y + 3$, alors $x = y$.

Supposons que $2x + 3 = 2y + 3$.

En retranchant 3 des deux côtés, on obtient : $2x = 2y$.

En divisant par 2, on en déduit que : $x = y$.

Par contraposition, l'implication est vraie.

3/ Raisonnement par l'absurde :

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers naturels p et q ($q \neq 0$) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible ($\text{pgcd}(p, q) = 1$).

En élevant au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, ce qui implique que p est pair. Posons $p = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Alors $(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2$. Donc q^2 est pair, ce qui implique que q est pair.

Puisque p et q sont tous les deux pairs, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4/ Raisonnement par récurrence :

Soit $P(n)$ la proposition : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite vaut $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

• **Hérédité** : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$, c'est-à-dire $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) \\ &= (n+1) \frac{(2n^2 + 7n + 6)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

L'hérédité est prouvée.

• **Conclusion** : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution Exercice 2
1/ Résolution des équations :

- Pour $(E_1) : 2x^2 - 5x + 3 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Les solutions sont $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$. Donc :

$$S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$

- Pour $(E_2) : -x^2 + 4x - 4 = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0.$$

La solution unique est $x_0 = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2$. Donc

$$S = \{2\}$$

2/ Résolution de l'inéquation (I_1) :

Le trinôme $2x^2 - 5x + 3$ s'annule en 1 et $\frac{3}{2}$. Le coefficient de x^2 étant positif ($a = 2 > 0$), le trinôme est négatif à l'intérieur des racines.

D'après le tableau de signes, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

3/ Étude du polynôme $P(x)$:

- $P(1) = 1^3 - 3(1)^2 - 1 + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$. Donc 1 est racine de $P(x)$.
- En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 1)$ ou par identification, on trouve : $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$.
Pour résoudre $P(x) = 0$, on résout $x^2 - 2x - 3 = 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$. Les racines sont $x' = -1$ et $x'' = 3$.

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{-1; 1; 3\}$$

Solution Exercice 3
1/ Résolution du système par Cramer :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 2 \times 2 = -3 - 4 = -7 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 \times (-1) - 1 \times 2 = -14 \implies x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times 12 = -21 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$$

L'ensemble des solutions est $S = \{(2; 3)\}$.

2/ Application économique :

- Le nombre total de calculatrices est 40 $\Rightarrow x + y = 40$.

Le coût total est 1050 DH $\Rightarrow 30x + 20y = 1050$.

Le système est : $\begin{cases} x + y = 40 \\ 30x + 20y = 1050 \end{cases}$ qui se simplifie en $\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x + 2y = 105 \end{cases}$.

- De la première équation, $y = 40 - x$. En remplaçant dans la seconde :

$$3x + 2(40 - x) = 105 \Rightarrow 3x + 80 - 2x = 105 \Rightarrow x = 25.$$

On en déduit $y = 40 - 25 = 15$.

Le commerçant a acheté **25 calculatrices du premier type** et **15 du second type**.

