



Modèle 1

Devoir surveillé n°1



1 BAC SCEX

S. EL JAAFARI



I– Énoncés des exercices



Exercice 1

1/ En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), \quad [(x \neq y) \text{ et } (xy \neq 1)] \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \neq \frac{\sqrt{y}}{y + \sqrt{y} + 1}.$$

2/ Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$1(3 \times 1 + 1) + 2(3 \times 2 + 1) + 3(3 \times 3 + 1) + \cdots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2,$$



Exercice 2

1/ Soient a et b dans $\mathbb{R}^+$ tels que $a + b = 0$. Montrer par l'absurde que $a = 0$ et $b = 0$.

2/ En déduire les solutions des deux équations suivantes :

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

b) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 + 2} = 0$



Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 2}.$$

1/ a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Montrer que f est majorée par 1.

c) Montrer que f admet une valeur minimale en $a = \frac{1}{2}$.

2/ On considère la fonction numérique h définie par

$$h(x) = \frac{x}{x + 2}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h .

b) Étudier les variations de h sur D_h .

c) En déduire les variations de f sur D_f .



Exercice 4



On considère les deux fonctions numériques f et g définies par

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{2-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}x^3.$$

- 1/ Dresser le tableau de variation de f et g .
- 2/ Résoudre dans $] -\infty, 2[$ l'équation $f(x) = 0$, et en déduire une interprétation géométrique du résultat.
- 3/ Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 4/ Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation sur $\mathbb{R}^* \setminus \{2\}$:

$$\frac{3(x-1)}{x^2} \leq x(2-x).$$

(On admet que α et β avec $\alpha < \beta$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.)



II– Corrigés de exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ **Contraposée.** Pour $x, y \geq 0$ (условие d'existence des racines), la contraposée s'écrit :

$$\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{y}}{y + \sqrt{y} + 1} \Rightarrow (x = y) \vee (xy = 1).$$

Posons $a = \sqrt{x} \geq 0$ et $b = \sqrt{y} \geq 0$. Les dénominateurs $a^2 + a + 1$ et $b^2 + b + 1$ sont strictement positifs, donc :

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + a + 1} &= \frac{b}{b^2 + b + 1} \iff a(b^2 + b + 1) = b(a^2 + a + 1) \\ &\iff ab^2 + ab + a = a^2b + ab + b \\ &\iff ab^2 - a^2b + a - b = 0 \\ &\iff ab(b - a) - (b - a) = 0 \\ &\iff (a - b)(1 - ab) = 0. \end{aligned}$$

Donc $a = b$, c'est-à-dire $x = y$, ou $ab = 1$, c'est-à-dire $\sqrt{xy} = 1$, soit $xy = 1$. La contraposée est démontrée, donc l'implication initiale est vraie.

2/ **Récurrence** (ou calcul direct). Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(3k+1) &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} [(2n+1) + 1] \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2(n+1) = n(n+1)^2. \end{aligned}$$

✓ Solution Exercice 2

1/ Supposons $a \neq 0$. Comme $a \in \mathbb{R}^+$, on a $a > 0$, et comme $b \geq 0$, on a $a + b > 0$. Cela contredit $a + b = 0$. Donc $a = 0$, et alors $b = -a = 0$.

2/ a) Je reconnais une somme de carrés :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Une somme de carrés nuls est nulle, donc $x = 1$ et $y = -2$. **Solution :** $(x, y) = (1, -2)$.

b) Les deux termes $\sqrt{x^2 - 4}$ et $\sqrt{y^2 + 2}$ sont positifs ou nuls. Leur somme est nulle, donc chacun est nul. Or $\sqrt{y^2 + 2} \geq \sqrt{2} > 0$, donc l'équation n'a **aucune solution** : $S = \emptyset$.

Solution Exercice 3

1/ a) Le dénominateur vérifie $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$ pour tout x . Donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2 - 2}{x^2 - x + 2} = 1 - \frac{2}{x^2 - x + 2}.$$

Comme $x^2 - x + 2 > 0$, on a $\frac{2}{x^2 - x + 2} > 0$, donc $f(x) < 1$. Ainsi f est majorée par 1.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$, donc $\frac{2}{x^2 - x + 2} \leq \frac{8}{7}$, d'où $f(x) \geq 1 - \frac{8}{7} = -\frac{1}{7}$. De plus

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{7}{4}} = -\frac{1}{7}. \text{ Donc } f \text{ admet un minimum en } a = \frac{1}{2}, \text{ égal à } -\frac{1}{7}.$$

2/ a) $x + 2 = 0 \iff x = -2$, donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) On écrit $h(x) = \frac{x + 2 - 2}{x + 2} = 1 - \frac{2}{x + 2}$. Donc

$$h'(x) = \frac{2}{(x + 2)^2} > 0 \text{ sur } D_h.$$

Ainsi h est strictement croissante sur $] -\infty, -2[$ et sur $] -2, +\infty[$.

c) On a $f = \varphi \circ q$ avec $q(x) = x^2 - x + 2$ et $\varphi(t) = 1 - \frac{2}{t}$.

- q est décroissante sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
- φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $\varphi'(t) = \frac{2}{t^2} > 0$).

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Solution Exercice 4

1/ **Fonction** f . $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On écrit $f(x) = -2 + \frac{2}{2-x}$, donc

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0 \text{ sur } D_f.$$

Limites : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	-2	$+\infty$	-2

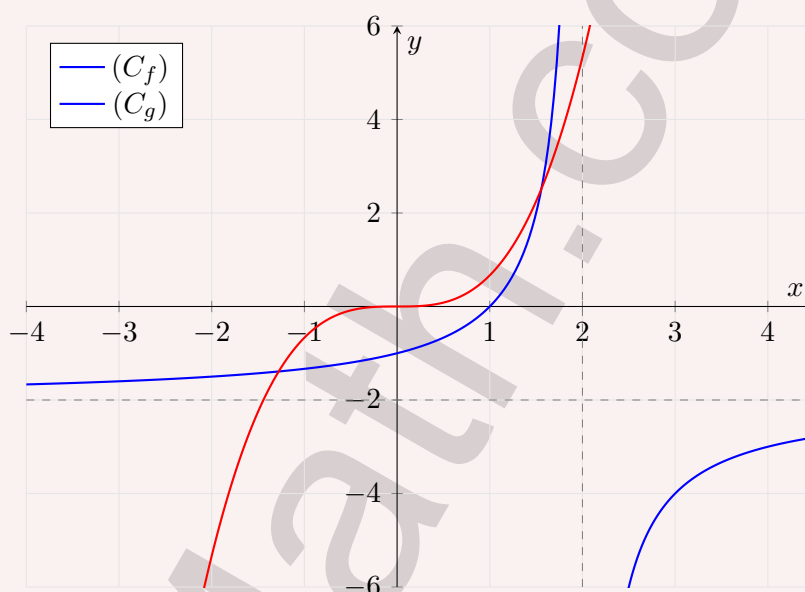
Fonction g . $g'(x) = 2x^2 \geq 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (avec un point d'inflexion en 0).



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2/ Sur $] -\infty, 2[$, $f(x) = 0 \iff 2(x-1) = 0 \iff x = 1$. Donc $S = \{1\}$. Géométriquement, le point $(1, 0)$ est le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses : c'est l'unique zéro de f sur $] -\infty, 2[$.

3/ Représentation graphique :



4/ Pour $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{2\}$, on multiplie l'inéquation par $x^2 > 0$:

$$\frac{3(x-1)}{x^2} \leq x(2-x) \iff 3(x-1) \leq x^3(2-x) \iff P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 3 \leq 0.$$

Le polynôme P a deux racines réelles $\alpha \approx -1,28$ et $\beta \approx 1,55$ (ce sont exactement les solutions de $f(x) = g(x)$, car $f(x) = g(x) \iff 3(x-1) = x^3(2-x)$). Comme P est négatif entre ses racines (coefficient dominant positif), on obtient $P(x) \leq 0 \iff x \in [\alpha, \beta]$. En excluant $x = 0$ (qui n'appartient pas au domaine), l'ensemble des solutions est :

$$S = [\alpha, 0[\cup]0, \beta].$$