



Devoir surveillé n°1

Modèle 1

1 BAC SM

S. EL JAAFARI



Exercice 1

On considère les propositions suivantes :

- P_1 : " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + 2y > 3$ "
- P_2 : " $(\exists z \in \mathbb{R}) : z - 1 < \frac{z}{z-1} < z$ "
- P_3 : " $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : [(a \neq 1 \text{ et } b \neq 1) \Rightarrow (a + b \neq 2)]$ "

1/ Donner les négations des propositions P_1 ; P_2 ; P_3 .

2/ Donner la contraposée de l'implication de la proposition P_3 .

3/ Quelle est la valeur de vérité de la proposition P_3 ?



Exercice 2

1/ En utilisant le raisonnement par disjonction des cas, montrer que :

$$(3 \text{ ne divise pas } n) \Rightarrow (3 \text{ divise } (n^2 - 1))$$

2/ On pose $I =] - \infty, -2[$.

a/ Démontrer que : $(\forall a \in I)(\forall b \in I) , ab + a + b > 0$.

b/ En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que :

$$(\forall a \in I)(\forall b \in I) \left[(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a+1}{b^2+2b+2} \neq \frac{b+1}{a^2+2a+2} \right) \right]$$



Exercice 3

1/ En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\text{a) } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = 1 + 2^n(n-1).$$

$$\text{b) } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}.$$

2/ Soient $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a \neq b$. On pose $x = \frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

a) Démontrer par l'absurde que : $x \neq b$.



- b) En utilisant le raisonnement par l'absurde, démontrer que : $x \notin \mathbb{Q}$.
(On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).



Exercice 4

1/ Soient A , B et C trois parties d'un ensemble non vide.

- a) Montrer que : $(A - B) - (B - C) = A - (B \cup C)$.
b) Montrer que $B - A = (A \cup B) - A$, et en déduire que :

$$(A \cup B = A \cup C) \Rightarrow (B - A = C - A)$$

2/ Soient E et F deux ensembles définis par :

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - x - 15 \leq 0\} \text{ et } F = \left\{n \in \mathbb{N} / \frac{2n+16}{n+2} \in \mathbb{N}\right\}$$

- a) Montrer que $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2, 4, 10\}$.
b) Déterminer en extension les ensembles : $E \cap F$, $E \cup F$ et $E \Delta F$.



Exercice 5

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- 1/ a) Déterminer $f^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$.
b) En déduire que f n'est pas injective.
- 2/ a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) |f(x)| \leq \frac{1}{2}$.
b) En déduire que f n'est pas surjective.
- 3/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
- a) Montrer que g est une bijection de $]1, +\infty[$ vers $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
b) Déterminer l'expression de g^{-1} la bijection réciproque de g .

Bon courage