



Devoir surveillé n°1

Modèle 2

2 BAC SM

S. EL JAAFARI



Exercice 1

Déterminer les limites suivantes en justifiant rigoureusement chaque étape de votre calcul :

1/ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

2/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 - x} \right)$

3/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(2x)}{\sin(3x)}$

4/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) \right)$

5/ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$

6/ $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$



Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \arctan(x)}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1/ Étudier la continuité de la fonction f en 0.

2/ a) Justifier soigneusement que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{f(\sqrt{x})}\right)$. Justifier la continuité de h sur son domaine de définition.



Exercice 3

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.



1/ Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe au moins un réel $x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que :

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)$$

2/ Soient a et b deux réels strictement positifs. Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $g(0) \cdot g(1) < 0$. Montrer que l'équation suivante admet au moins une solution $\beta \in]0, 1[$:

$$a \cdot g(\beta) + b \cdot g(1 - \beta) = 0$$



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x})$$

1/ Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

2/ On note f^{-1} la fonction réciproque de f .

a) Justifier que f^{-1} est strictement croissante et continue sur J .

b) Résoudre dans l'intervalle J l'équation numérique suivante :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}$$



Exercice 5

On considère la fonction numérique F définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$F(x) = \sqrt{\tan(x)} + \arctan(\sin(x))$$

1/ Montrer que F est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} F(x)$.

3/ a) Montrer que F admet un prolongement par continuité à droite en 0, que l'on notera $\tilde{F}$.

b) Est-il possible de prolonger F par continuité à gauche en $\frac{\pi}{2}$? Justifier votre réponse.

c) Montrer que la fonction prolongée $\tilde{F}$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle K à déterminer.

□ Bon courage □