



Devoir surveillé n°1

Modèle 2

2 BIOF PC et SVT

S. EL JAAFARI



Exercice 1

Calculer les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 - x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x-1}$



Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $D = \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Montrer que la fonction f est continue en 0.

3/ Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

4/ a) Montrer que pour tout réel non nul x on a : $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

b) Donner le tableau de variations de f .

5/ g est la restriction de f sur $]0; +\infty[$.

Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

6/ Calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.



Exercice 3



On considère la fonction numérique f définie sur $D = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ par :

$$f(x) = x + \sqrt[3]{3x+1}$$

$\mathcal{C}$ est la courbe de la fonction f dans un r.o.n

- 1/ Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
- 2/ Étudier la branche infinie de la courbe $\mathcal{C}$.
- 3/ Calculer $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^+} \frac{3f(x)+1}{3x+1}$ et donner une interprétation géométrique.
- 4/ Étudier les variations de la fonction f .
- 5/ Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse α telle que $-\frac{1}{3} < \alpha < 0$.
- 6/ Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 7/ Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 et que $(f^{-1})'(0) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$.
- 8/ Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

BON COURAGE