



Modèle 2

Devoir surveillé n°1



1 BAC SCEX

S. EL JAAFARI



I– Énoncés des exercices



Exercice 1

1/ On considère la proposition suivante : $P : (\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + x - 2 = 0$

- a) Donner la négation de la proposition P .
- b) En utilisant le raisonnement par contre-exemple, montrer que la proposition P est fausse.

2/ En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$$

3/ En utilisant le raisonnement par la contraposée, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) ; x \neq y \implies (x - 1)(y + 1) \neq (x + 1)(y - 1)$$

4/ Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\sqrt{2a + 2} - \sqrt{a} = 1 \iff a = 1$$

5/ En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}) ; \frac{n - 3}{n - 2} \neq 1$$



Exercice 2

Partie I

Soient f et g deux fonctions numériques telles que $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ et $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

- 1/ Déterminer D_f et D_g les ensembles de définition de f et g respectivement.
- 2/ Déterminer la nature de (C_g) en précisant ses éléments caractéristiques.
- 3/ Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur D_g .
- 4/ Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .
- 5/ Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(-1)$, $g(3)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(5)$.
- 6/ Construire (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 7/ Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.



Partie II

Soit h une fonction numérique définie par $h(x) = 2x - 1 - 4\sqrt{x-1}$.

- 1/ Déterminer D_h l'ensemble de définition de la fonction h .
- 2/ Vérifier que $(\forall x \in D_h); h(x) = (g \circ f)(x)$.
- 3/ Étudier la monotonie de la fonction $h = g \circ f$ sur les intervalles $[1; 2]$ et $[2; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction h sur D_h .

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-3; +\infty[$ et représentée par le tableau des variations suivant :

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	-8	-1	-5	-2	0

- 1/ Déterminer le signe de la fonction f .
- 2/ Déterminer le tableau des variations de la fonction g dans chacun des cas suivants :
 - a) $g(x) = 9f(x) - 11$
 - b) $g(x) = -13f(x) + 2$
 - c) $g(x) = \frac{5}{f(x)}$
 - d) $g(x) = \frac{f(x) + 2}{f(x) - 1}$
 - e) $g(x) = \sqrt{7 - 2f(x)}$
 - f) $g(x) = -(f(x))^3$



II– Corrigés de exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ a) La négation de la proposition P , notée $\overline{P}$, est :

$$\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}) ; x^2 + x - 2 \neq 0$$

b) Pour montrer que P est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple qui vérifie $\overline{P}$.
Prenons $x = 0$. On a $0 \in \mathbb{R}$, et :

$$0^2 + 0 - 2 = -2 \neq 0$$

L'égalité n'est pas vérifiée pour $x = 0$, donc la proposition $\overline{P}$ est **vraie**, par conséquent P est **fausse**.

2/ Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n : 1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation** : Pour $n = 0$:

– Membre de gauche : $6^0 = 1$

– Membre de droite : $\frac{6^{0+1} - 1}{5} = \frac{6 - 1}{5} = \frac{5}{5} = 1$

L'égalité est vraie, donc $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.

• **Hérédité** : Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie, c'est-à-dire :

$$1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$$

Montrons qu'alors $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire :

$$1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n + 6^{n+1} = \frac{6^{n+2} - 1}{5}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} 1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^n + 6^{n+1} &= \frac{6^{n+1} - 1}{5} + 6^{n+1} \\ &= \frac{6^{n+1} - 1 + 5 \cdot 6^{n+1}}{5} \\ &= \frac{(1 + 5) \cdot 6^{n+1} - 1}{5} \\ &= \frac{6 \cdot 6^{n+1} - 1}{5} \\ &= \frac{6^{n+2} - 1}{5} \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.

• **Conclusion** : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3/ Par contraposition, montrer l'implication $A \implies B$ revient à démontrer l'implication équivalente $\overline{B} \implies \overline{A}$.

Formulons la contraposée :

$$(x - 1)(y + 1) = (x + 1)(y - 1) \implies x = y$$



Développons l'hypothèse de départ :

$$\begin{aligned}(x-1)(y+1) &= (x+1)(y-1) \implies xy + x - y - 1 = xy - x + y - 1 \\ \implies x - y &= -x + y \\ \implies 2x &= 2y \\ \implies x &= y\end{aligned}$$

La contraposée étant démontrée, l'implication initiale est **vraie**.

4/ Montrons l'équivalence par double implication :

- **Sens direct ($\implies$) :** Supposons $\sqrt{2a+2} - \sqrt{a} = 1$.

$$\implies \sqrt{2a+2} = 1 + \sqrt{a}$$

Comme les deux membres sont positifs, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned}2a + 2 &= (1 + \sqrt{a})^2 \\ 2a + 2 &= 1 + 2\sqrt{a} + a \\ a + 1 &= 2\sqrt{a}\end{aligned}$$

Élevons à nouveau au carré :

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &= (2\sqrt{a})^2 \\ a^2 + 2a + 1 &= 4a \\ a^2 - 2a + 1 &= 0 \\ (a-1)^2 &= 0 \implies a = 1\end{aligned}$$

- **Sens réciproque ($\impliedby$) :** Supposons $a = 1$.

$$\implies \sqrt{a+2} - \sqrt{a} = \sqrt{2(1)+2} - \sqrt{1} = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$$

L'implication réciproque est vérifiée.

L'équivalence est ainsi démontrée.

5/ Supposons par l'absurde qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ tel que :

$$\frac{n-3}{n-2} = 1$$

En multipliant les deux côtés par $(n-2)$, on obtient :

$$n-3 = n-2$$

En soustrayant n des deux côtés, il reste :

$$-3 = -2$$

Ce résultat est mathématiquement impossible (contradiction). Notre hypothèse de départ est donc fausse, ce qui prouve que :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}); \frac{n-3}{n-2} \neq 1$$

 ✓ Solution Exercice 2

Partie I

1/ Ensembles de définition :

- g est une fonction polynôme, donc $D_g = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$. Donc $D_f = [1; +\infty[$.

2/ Nature de (C_g) : g est une fonction trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = 1$.

La courbe (C_g) est une **parabole** de sommet $\Omega(\alpha, \beta)$ où :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$$

$$\beta = g(\alpha) = g(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = -1$$

L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 1$. Puisque $a = 2 > 0$, la parabole est orientée vers le haut.

3/ Variations et tableau de la fonction g : Puisque $a > 0$, g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

4/ Tableau de variations de la fonction f : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, donc $f(x) = \sqrt{x-1}$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Avec $f(1) = 0$.

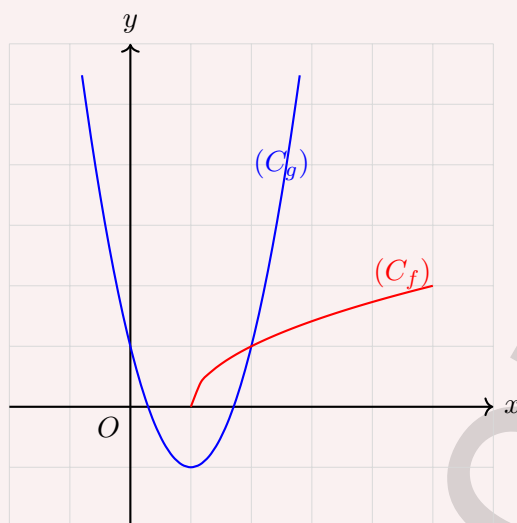
x	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

5/ Calculs d'images :

- $g(0) = 2(0)^2 - 4(0) + 1 = 1$
- $g(1) = -1$
- $g(2) = 2(2)^2 - 4(2) + 1 = 1$
- $g(-1) = 2(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 7$
- $g(3) = 2(3)^2 - 4(3) + 1 = 7$
- $f(1) = \sqrt{1-1} = 0$
- $f(2) = \sqrt{2-1} = 1$
- $f(5) = \sqrt{5-1} = 2$



6/ Courbes représentatives :

7/ Résolution graphique de $f(x) = g(x)$:

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) . Graphiquement, les deux courbes se coupent au point d'abscisse $x = 2$. Donc $S = \{2\}$.

Partie II

1/ Ensemble de définition de h : $h(x)$ contient une racine carrée $\sqrt{x-1}$, il faut donc que $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$. Ainsi, $D_h = [1; +\infty[$.

2/ Vérification de la composée $h(x) = (g \circ f)(x)$: Pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) \\ &= 2(\sqrt{x-1})^2 - 4\sqrt{x-1} + 1 \\ &= 2(x-1) - 4\sqrt{x-1} + 1 \\ &= 2x - 2 - 4\sqrt{x-1} + 1 \\ &= 2x - 1 - 4\sqrt{x-1} = h(x) \end{aligned}$$

On a bien $(\forall x \in D_h) ; h(x) = (g \circ f)(x)$.

3/ Monotonie et tableau de variations de h : Rappelons que la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

- **Sur l'intervalle $[1; 2]$** : Si $x \in [1; 2]$, alors comme f est croissante, $f(x) \in [f(1); f(2)] = [0; 1]$. Or, la fonction g est strictement décroissante sur $[0; 1]$. Par composition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, h est **strictement décroissante** sur $[1; 2]$.
- **Sur l'intervalle $[2; +\infty[$** : Si $x \in [2; +\infty[$, alors $f(x) \in [f(2); +\infty[= [1; +\infty[$. Or, la fonction g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Par composition de deux fonctions croissantes, h est **strictement croissante** sur $[2; +\infty[$.

Valeurs remarquables : $h(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$ et $h(2) = g(f(2)) = g(1) = -1$.



x	1	2	$+\infty$
$h(x)$	1	-1	$+\infty$

✓ Solution Exercice 3

1/ Signe de la fonction f

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in [-3; +\infty[$, $f(x) < 0$. La fonction f est **strictement négative** sur son domaine de définition $[-3; +\infty[$.

2/ Tableaux de variations de la fonction g

a) $g(x) = 9f(x) - 11$

La fonction affine $t \mapsto 9t - 11$ est strictement croissante car son coefficient directeur $9 > 0$. Ainsi, la fonction g conserve les mêmes variations que f .

- $g(-3) = 9(-8) - 11 = -83$
- $g(0) = 9(-1) - 11 = -20$
- $g(2) = 9(-5) - 11 = -56$
- $g(4) = 9(-2) - 11 = -29$
- En $-\infty$ on a $9(0) - 11 = -11$

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	-83	-20	-56	-29	-11

b) $g(x) = -13f(x) + 2$

La fonction affine $t \mapsto -13t + 2$ est strictement décroissante car $-13 < 0$. Par composition, les variations de g sont inversées par rapport à celles de f .

- $g(-3) = -13(-8) + 2 = 106$
- $g(0) = -13(-1) + 2 = 15$
- $g(2) = -13(-5) + 2 = 67$
- $g(4) = -13(-2) + 2 = 28$
- $-\infty$ on a : $-13(0) + 2 = 2$

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	106	15	67	28	2



c) $g(x) = \frac{5}{f(x)}$ La fonction inverse $t \mapsto \frac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. Comme $5 > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{5}{t}$ est également strictement décroissante. Les variations de g sont donc inversées par rapport à celles de f .

- $g(-3) = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$
- $g(0) = \frac{5}{-1} = -5$
- $g(2) = \frac{5}{-5} = -1$
- $g(4) = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$
- En $-\infty$ on a : $-\infty$

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	$-\frac{5}{8}$		-1	$-\frac{5}{2}$	$-\infty$

Diagram showing the variation of $g(x)$ with arrows indicating the decreasing trend: from $-\frac{5}{8}$ to -5 , from -5 to -1 , from -1 to $-\frac{5}{2}$, and from $-\frac{5}{2}$ to $-\infty$.

d) $g(x) = \frac{f(x) + 2}{f(x) - 1}$ Étudions les variations de la fonction homographique $h(t) = \frac{t + 2}{t - 1}$ sur $] -\infty; 0[$.

Son déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$, donc la fonction h est strictement décroissante sur $[-8, 0[$ d'où Les variations de $g = h \circ f$ sont inversées par rapport à celles de f .

- $g(-3) = \frac{-8 + 2}{-8 - 1} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$
- $g(0) = \frac{-1 + 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$
- $g(2) = \frac{-5 + 2}{-5 - 1} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$
- $g(4) = \frac{-2 + 2}{-2 - 1} = 0$
- En $-\infty$ on a : $h(0) = -2$

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$	-2	$-\infty$

Diagram showing the variation of $g(x)$ with arrows indicating the decreasing trend: from $\frac{2}{3}$ to $-\frac{1}{2}$, from $-\frac{1}{2}$ to $\frac{1}{2}$, from $\frac{1}{2}$ to -2 , and from -2 to $-\infty$.

e) $g(x) = \sqrt{7 - 2f(x)}$ La fonction $t \mapsto \sqrt{7 - 2t}$ est strictement décroissante Par composition avec f , les variations de g sont inversées par rapport à celles de f .

- $g(-3) = \sqrt{7 - 2(-8)} = \sqrt{23}$
- $g(0) = \sqrt{7 - 2(-1)} = \sqrt{9} = 3$
- $g(2) = \sqrt{7 - 2(-5)} = \sqrt{17}$
- $g(4) = \sqrt{7 - 2(-2)} = \sqrt{11}$

- En $-\infty$ on a : $\sqrt{7-2(0)} = \sqrt{7}$

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	$\sqrt{23}$		$\sqrt{17}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{7}$

Diagram showing the mapping of $g(x)$ values: $\sqrt{23} \rightarrow 3 \rightarrow \sqrt{17} \rightarrow \sqrt{11} \rightarrow \sqrt{7}$.

f) $g(x) = -(f(x))^3$ La fonction $t \mapsto -t^3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Par composition, les variations de g sont inversées par rapport à celles de f .

- $g(-3) = -(-8)^3 = -(-512) = 512$
- $g(0) = -(-1)^3 = -(-1) = 1$
- $g(2) = -(-5)^3 = -(-125) = 125$
- $g(4) = -(-2)^3 = -(-8) = 8$
- En $-\infty$ on a : $-(0)^3 = 0$

x	-3	0	2	4	$+\infty$
$g(x)$	512	1	125	8	0

Diagram showing the mapping of $g(x)$ values: $512 \rightarrow 1 \rightarrow 125 \rightarrow 8 \rightarrow 0$.

