



Modèle 2

Devoir surveillé n°1



1 BAC SECO

S. EL JAAFARI



I- Énoncés des exercices



Exercice 1

1/ Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 1"$.
- $P_2 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2 = 0"$.

2/ En utilisant un raisonnement par **disjonction des cas**, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x - 2| = 3$.

3/ Soit x et y deux nombres réels. En utilisant un raisonnement par **contraposée**, montrer que :
 $(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$.

4/ Soit $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant le raisonnement par **l'absurde**, montrer que : $\frac{b}{1+a} = \frac{a}{1+b} \implies a = b$.

5/ En utilisant le raisonnement par **récurrence**, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$



Exercice 2

Partie A :

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$-x^2 + 4x + 5 \geq 0$$

3/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation irrationnelle suivante :

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

Partie B : Application Économique

Une entreprise produit et vend un article spécifique. Le nombre d'articles produits (en milliers) est désigné par x , où $x \in [0; 10]$.

- La fonction de **Recette** totale (en milliers de dirhams) est donnée par : $R(x) = 10x$
- La fonction de **Coût** total (en milliers de dirhams) est donnée par : $C(x) = x^2 + 3x + 6$



1/ Montrer que la fonction de **Bénéfice** $B(x)$, définie par $B(x) = R(x) - C(x)$, s'exprime par :

$$B(x) = -x^2 + 7x - 6$$

2/ Déterminer le nombre d'articles x à produire pour que l'entreprise atteigne le **seuil de rentabilité** (c'est-à-dire lorsque le bénéfice est nul : $B(x) = 0$).

3/ À l'aide d'un tableau de signes, déterminer l'intervalle des quantités x pour lesquelles l'entreprise réalise un **bénéfice strictement positif** ($B(x) > 0$).

Exercice 3

Partie A :

1/ Soit le système linéaire (S) défini dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$(S) : \begin{cases} 2x + 5y = 340 \\ 3x + 10y = 610 \end{cases}$$

a) Calculer le déterminant Δ du système (S) et en déduire qu'il admet une solution unique.

b) Résoudre le système (S) en utilisant la méthode de Cramer.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant un changement de variable :

$$(S') : \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -4 \end{cases}$$

Partie B : Application Économique

Un artisan marocain fabrique deux types de tapis traditionnels : le modèle **A** (Berbère) et le modèle **B** (Rbati).

- Pour fabriquer un tapis du modèle **A**, il faut 2 kg de laine et 3 heures de travail.
- Pour fabriquer un tapis du modèle **B**, il faut 5 kg de laine et 10 heures de travail.

Après une semaine de production, l'artisan a utilisé un total de 340 kg de laine et a travaillé pendant 610 heures.

- 1/ En posant x le nombre de tapis du modèle **A** et y le nombre de tapis du modèle **B**, montrer que cette situation se traduit par le système (S) de la Partie A.
- 2/ En déduire le nombre de tapis de chaque modèle fabriqués par cet artisan.
- 3/ Le modèle **A** est vendu à 1 500 Dirhams l'unité et le modèle **B** à 2 500 Dirhams l'unité. Calculer le chiffre d'affaires total réalisé par l'artisan.



II– Corrigés de exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ Négation et valeur de vérité des propositions

- **Pour $P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 1"$:**
 - **Négation :** $\overline{P_1} : "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 < 1"$
 - **Valeur de vérité :** La proposition P_1 est **Fausse**. En effet, il existe un contre-exemple évident : pour $x = 0 \in \mathbb{R}$, on a $0^2 = 0$, et $0 < 1$.
- **Pour $P_2 : "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 = 0"$:**
 - **Négation :** $\overline{P_2} : "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 \neq 0"$
 - **Valeur de vérité :** La proposition P_2 est **Vraie**. En effet, il suffit de choisir $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (ou $x = -\sqrt{2}$), ce qui donne $(\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$.

2/ Résolution par disjonction des cas : $|x - 2| = 3$

Pour enlever les barres de la valeur absolue, nous étudions le signe de l'expression $x - 2$:

- **Premier cas : $x \geq 2$ (c'est-à-dire $x - 2 \geq 0$)**
 Dans ce cas, $|x - 2| = x - 2$.
 L'équation devient : $x - 2 = 3 \iff x = 5$.
 Comme $5 \geq 2$, la valeur 5 est une solution valide.
- **Second cas : $x < 2$ (c'est-à-dire $x - 2 < 0$)**
 Dans ce cas, $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$.
 L'équation devient : $-x + 2 = 3 \iff -x = 1 \iff x = -1$.
 Comme $-1 < 2$, la valeur -1 est également une solution valide.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est donc : $S = \{-1; 5\}$.

3/ Raisonnement par contraposée

Nous voulons montrer l'implication :

$$(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

Par contraposée, cela revient à démontrer l'implication équivalente suivante :

$$2x + 2y - xy - 2 = 2 \implies (x = 2 \text{ ou } y = 2)$$

Supposons que $2x + 2y - xy - 2 = 2$ et transformons cette égalité :

$$\begin{aligned} 2x + 2y - xy - 2 = 2 &\implies 2x + 2y - xy - 4 = 0 \\ &\implies (2x - 4) + (2y - xy) = 0 \\ &\implies 2(x - 2) - y(x - 2) = 0 \\ &\implies (x - 2)(2 - y) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - y = 0 \iff x = 2 \quad \text{ou} \quad y = 2$$

Donc : $2x + 2y - xy - 2 = 2 \implies (x = 2 \text{ ou } y = 2)$.

Donc L'implication contraposée est vraie, par conséquent la proposition initiale est **vraie**.



4/ Raisonnement par l'absurde

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Nous voulons montrer que $\frac{b}{1+a} = \frac{a}{1+b} \implies a = b$.

Supposons par l'absurde que :

$$\frac{b}{1+a} = \frac{a}{1+b} \quad \text{et} \quad a \neq b$$

Développons l'égalité en utilisant le produit en croix :

$$\begin{aligned} \frac{b}{1+a} = \frac{a}{1+b} &\implies b(1+b) = a(1+a) \\ &\implies b + b^2 = a + a^2 \\ &\implies (b^2 - a^2) + (b - a) = 0 \\ &\implies (b - a)(b + a) + (b - a) = 0 \\ &\implies (b - a)(b + a + 1) = 0 \end{aligned}$$

Puisque nous avons supposé par l'absurde que $a \neq b$, nous savons que $b - a \neq 0$. Nous pouvons donc diviser les deux membres par $(b - a)$, ce qui donne :

$$b + a + 1 = 0 \iff a + b = -1$$

Or, par hypothèse, $a > 0$ et $b > 0$, donc la somme $a + b$ doit être strictement positive ($a + b > 0$). Obtenir $a + b = -1$ est une **contradiction**.

L'hypothèse $a \neq b$ est donc fausse, ce qui prouve que $a = b$.

5/ Raisonnement par récurrence

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$

Le membre de gauche est égal à : $2^0 = 1$.

Le membre de droite est égal à : $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Supposons la propriété vraie au rang n (Hypothèse de récurrence) :

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Montrons qu'elle reste vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}_{= 2^{n+1} - 1} + 2^{n+1} &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi démontrée.

- **Conclusion** : La propriété est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Solution Exercice 2
Partie A :**1/ Résolution de $2x^2 - 5x - 3 = 0$:**

C'est une équation du second degré avec $a = 2$, $b = -5$ et $c = -3$.
Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{-\frac{1}{2}; 3\}$

2/ Résolution de $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$:

Cherchons d'abord les racines du trinôme $-x^2 + 4x + 5$ ($a = -1$, $b = 4$, $c = 5$) :

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)(5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-4 - 6}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 6}{-2} = -1$$

Dressons le tableau de signes (le trinôme est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines) :

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$-x^2 + 4x + 5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Nous cherchons les valeurs où le trinôme est positif ou nul. L'ensemble des solutions est : $S = [-1; 5]$

3/ Résolution de $\sqrt{x+1} = x-1$:

• **Condition d'existence** : $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$.

• **Condition de positivité** : Un radical étant positif, il faut que $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$.

L'équation est donc étudiée sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Élevons les deux membres au carré :

$$x+1 = (x-1)^2 \iff x+1 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$$

Les solutions de cette équation algébrique sont $x = 0$ ou $x = 3$.

• $0 \notin [1; +\infty[$ (solution rejetée).

• $3 \in [1; +\infty[$ (solution validée, car $\sqrt{3+1} = 2$ et $3-1 = 2$).

L'ensemble des solutions est : $S = \{3\}$

Partie B : Application Économique



1/ Expression du bénéfice :

Par définition, $B(x) = R(x) - C(x)$.

$$B(x) = 10x - (x^2 + 3x + 6) = 10x - x^2 - 3x - 6 = -x^2 + 7x - 6$$

On a bien : $B(x) = -x^2 + 7x - 6$

2/ Seuil de rentabilité ($B(x) = 0$) :

Réolvons l'équation $-x^2 + 7x - 6 = 0$ sur $[0; 10]$:

$$\Delta = 7^2 - 4(-1)(-6) = 49 - 24 = 25 = 5^2$$

$$x_1 = \frac{-7 - 5}{-2} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 + 5}{-2} = 1$$

Les deux solutions appartiennent à l'intervalle de production $[0; 10]$.

L'entreprise atteint son seuil de rentabilité pour **1 000 articles** ou **6 000 articles** produits.

3/ Bénéfice strictement positif ($B(x) > 0$) :

Le trinôme $-x^2 + 7x - 6$ possède pour racines 1 et 6. Comme $a = -1 < 0$, il est strictement positif à l'intérieur des racines.

Dressons le tableau de signes restreint à l'intervalle $[0; 10]$:

x	0	1	6	10		
$B(x)$		-	0	+	0	-

Le bénéfice est strictement positif pour $x \in]1; 6[$.

L'entreprise réalise un bénéfice lorsque sa production est comprise **entre 1 000 et 6 000 articles** (exclus).

✓ Solution Exercice 3

Partie A :

1/ Résolution du système (S) :

a) Calcul du déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = (2 \times 10) - (3 \times 5) = 20 - 15 = 5$$

Comme $\Delta \neq 0$, le système (S) admet une solution unique $(x; y)$ dans $\mathbb{R}^2$.

b) Calcul de x et y par la méthode de Cramer :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 340 & 610 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = (340 \times 10) - (5 \times 610) = 3400 - 3050 = 350$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 340 \\ 3 & 610 \end{vmatrix} = (2 \times 610) - (340 \times 3) = 1220 - 1020 = 200$$



D'où :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{350}{5} = 70 \quad \text{et} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{200}{5} = 40$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{(70; 40)\}$.

2/ Résolution du système (S') par changement de variable

Soit le système suivant à résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$$(S') : \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -4 \end{cases}$$

Conditions d'existence : Le système est défini pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Effectuons le changement de variable en posant $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$. Le système devient :

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 13 \\ X - 2Y = -4 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on exprime X en fonction de Y :

$$X = 2Y - 4$$

En substituant cette expression de X dans la première équation :

$$2(2Y - 4) + 3Y = 13 \implies 4Y - 8 + 3Y = 13 \implies 7Y = 21 \implies Y = 3$$

On trouve ensuite la valeur de X :

$$X = 2(3) - 4 = 6 - 4 = 2$$

Maintenant, on revient aux variables initiales x et y :

$$X = 2 \implies \frac{1}{x} = 2 \implies x = \frac{1}{2}$$

$$Y = 3 \implies \frac{1}{y} = 3 \implies y = \frac{1}{3}$$

Ces valeurs respectent bien les conditions d'existence ($x \neq 0$ et $y \neq 0$). Ainsi, l'ensemble des solutions du système (S') est :

$$S' = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right) \right\}$$

Partie B : Application Économique

1/ Modélisation de la situation :

Remplaçons les données réelles de l'énoncé par un système exact qui tombe sur des nombres entiers (Ajustement pratique pour l'artisanat : supposons que l'énoncé initial lise $2x + 5y = 340$ pour la laine et $3x + 10y = 610$ pour le temps).

• Contrainte Laine : $2x + 5y = 340$

• Contrainte Temps : $3x + 10y = 610$

Donc (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} 2x + 5y = 340 \\ 3x + 10y = 610 \end{cases}$$

qui est le système de la partie A.

**2/ Conclusion sur la production :**

En résolvant le système de l'artisan mis en équation :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 340 \\ 3x + 10y = 610 \end{cases}$$

On trouve que l'artisan a produit exactement les valeurs entières correspondantes du marché étudié. D'après la question A)1) $x = 70$ et $y = 40$ soit 70 tapis du type A et 40 tapis du type B.

3/ Chiffre d'affaires (CA) :

$CA = 1500x + 2500y = 1500 \times 70 + 2500 \times 40 = 105\,000 + 100\,000 = 205\,000$. Donc le chiffre d'affaires réalisé par l'artisan est 205 000 dirhams.

