



Devoir surveillé n°1

Modèle 2



1 BAC SM

S. EL JAAFARI



Exercice 1

1/ Donner la négation puis déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes (justifier brièvement) :

- $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x^2 - xy + y^2 = 0$
- $P_2 : (\forall x \in]1, +\infty[) \quad \frac{2x}{x+1} > 1$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par **contraposition** la propriété suivante :

$$x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \implies x^2 - 3x - 2 \neq 2x - 8$$

3/ Montrer par **l'absurde** que pour tout $n \in \mathbb{N} : \sqrt{4n^2 + 5n + 3} \notin \mathbb{N}$.

4/ Montrer par **récence** que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E , on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E . On rappelle que la différence symétrique est définie par $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1/ Montrer que : $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

2/ Simplifier l'expression suivante : $X = \overline{(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B)}$.
Que représente cet ensemble ?

3/ Montrer que : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B$.

4/ Soient A , B et C trois parties de E . Montrer l'équivalence suivante :

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \iff A \subset C$$



Exercice 3

1/ Soit f l'application définie de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

- a) Montrer que f est **injective**.
- b) Montrer que f est **surjective**.



c) En déduire que f est une **bijection** et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

2/ Soit g l'application définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 4x + 5$$

- Déterminer l'image directe de l'intervalle $[1, 4]$ par g , c'est-à-dire $g([1, 4])$.
- Déterminer l'image réciproque du singleton $\{2\}$, c'est-à-dire $g^{-1}(\{2\})$.
- L'application g est-elle injective? Est-elle surjective? Justifier les réponses.



Exercice 4

1/ a) Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} = 1$$

Indice : On pourra poser $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ et $c = \frac{z}{x}$ avec $x, y, z > 0$.

b) Soient a et b deux réels positifs. Montrer que :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

c) Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Indice : On pourra commencer par étudier l'équivalence de l'inégalité avec l'expression $(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{9}{2}$.

2/ a) Soient x et y deux réels de l'intervalle $]1, +\infty[$. Montrer que :

$$x \neq y \implies \frac{x}{x^2-1} \neq \frac{y}{y^2-1}$$

b) Soient a, b, c et d quatre réels de l'intervalle $[0, 1]$. Montrer l'implication :

$$(a+b+c+d > 3) \implies (ab+cd > 0 \text{ et } ac+bd > 0)$$

3/ a) Soient a, b, c des entiers relatifs impairs. Montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution rationnelle.

b) Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $ab + bc + ca > 1$ et $a + b + c = 2$. Montrer par l'absurde que : $\max(a, b, c) < 1$.

4/ a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel $x > -1$ ($x \neq 0$), on a l'inégalité stricte suivante (Inégalité de Bernoulli généralisée) :

$$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2$$