



Devoir surveillé n°1

Modèle 3

2 BAC SM

S. EL JAAFARI



Exercice 1

Déterminez la valeur de chacune des 8 limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x} - \sqrt[4]{x^4 + 4x^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan(\sqrt{x+1}) - \arctan(\sqrt{x}) \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) - 2 \arctan(x)}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} - \frac{2}{3}x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[4]{1+x} - 3}{\arctan(x^2 + x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt[3]{1+x} - 1) - \frac{1}{3}x}{\sqrt[3]{1+\arctan(x)} - 1 - \frac{1}{3}x}$



Exercice 2

Soit la fonction f définie sur son domaine de définition maximal par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \cdot \sqrt{x + 3}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1/
 - a) Déterminer le domaine de définition maximal $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
 - b) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles qui composent son domaine.
- 2/ La fonction f n'est pas définie en $x_0 = 2$.
 - a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2.
 - b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 2 et définir proprement la fonction prolongée $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.
- 3/
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Préciser le comportement asymptotique de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (recherche d'une branche parabolique ou d'une asymptote oblique).
- 4/ On s'intéresse au comportement de la fonction au point frontière $x_1 = -3$.



- a) Étudier la limite à droite du taux d'accroissement de f en -3 , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)}$$

- b) La fonction f est-elle dérivable à droite en -3 ? Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

5/ On travaille désormais sur l'intervalle $I =]-3; +\infty[\setminus \{2\}$.

- a) Montrer que pour tout $x \in I$, la dérivée de f s'exprime sous la forme :

$$f'(x) = \frac{3x + 7}{2\sqrt{x + 3}}$$

- b) Dresser le tableau de variations complet de f sur son domaine, en y incluant les limites aux bornes ainsi que la valeur prolongée en 2.

6/ a) Montrer que la restriction de la fonction f (prolongée en 2) à l'intervalle $J = [0; +\infty[$ réalise une bijection de J vers un intervalle K que l'on déterminera.

- b) Justifier que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur J , puis déterminer sa valeur exacte par le calcul.



Exercice 3

On rappelle que la fonction $\arctan$ est définie comme la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

- 1/ a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier sa parité.
b) En utilisant uniquement les valeurs remarquables de la fonction tangente, calculer la valeur exacte de $f(1)$ et de $f(-1)$.
- 2/ a) En utilisant les limites connues de la fonction $\arctan$ en $+\infty$ et $-\infty$, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
b) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0? Justifier graphiquement ce qui se passe à l'origine.
- 3/ a) Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
b) En déduire les équations des asymptotes horizontales à la courbe de f aux voisinages de l'infini.
- 4/ Soit x un réel strictement positif ($x > 0$). On pose $\theta = \arctan(x)$.
a) À quel intervalle appartient le réel θ ? Exprimer x en fonction de $\tan(\theta)$.
b) En utilisant la formule de trigonométrie usuelle $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

- 5/ a) Déduire de la question précédente une expression très simple de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$, puis sur $] -\infty; 0[$ (en utilisant la parité).

- b) Donner le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$ (il ne nécessite aucun calcul de dérivée).
- 6/ On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \arctan(x) - x$. On donne la valeur approchée : $\arctan(1) \approx 0,785$.
- a) En utilisant le fait que pour tout $x \in]0; 1]$, $\tan(x) > x$ (et donc par réciproque que $\arctan(x) < x$), déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; 1]$.
- b) Montrer que l'équation $\arctan(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1; 1[$ par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

- 1/ a) Justifier que la fonction f est bien définie sur l'intervalle I .
 b) Étudier la parité de la fonction f sur I .
 c) Calculer les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en utilisant uniquement les valeurs de référence de la fonction tangente.
- 2/ a) Déterminer la limite de $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x^2}$.
 b) En déduire la limite de $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, puis par parité, en déduire $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
 c) La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes ? Justifier la réponse.
- 3/ Soit $x \in I$, on pose $\theta = \arctan(x)$.
 a) Justifier avec précision que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$.
 b) En utilisant la formule de duplication trigonométrique $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$, démontrer que pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f(x) = 2 \arctan(x)$$
- 4/ a) En utilisant la stricte monotonie de la fonction $\arctan$, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle I sans effectuer de calcul de dérivée.
 b) Donner l'équation de la droite tangente à la courbe de f à l'origine.
- 5/ a) Démontrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $I =]-1; 1[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
 b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur I , en y incluant les limites aux bornes ainsi que l'intervalle image J .
- 6/ On note $f^{-1} : J \rightarrow I$ la fonction réciproque de la fonction f .
 a) Soit $y \in J$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$.
 b) En déduire l'expression explicite de $f^{-1}(y)$ en fonction de y à l'aide d'une fonction trigonométrique usuelle.