



Devoir surveillé n° 1

Modèle 3

2 BIOF PC et SVT

S. EL JAAFARI



Exercice 1

1/ Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt[3]{1-x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt{x^2 - 3}}$

2/ Étudier la continuité de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

- $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt[3]{x+5} - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{3}{4} \end{cases} \quad x_0 = 2$
- $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} & \text{si } x < 2 \\ f(x) = x + 1 - \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

3/ Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x & \text{si } x < -1 \\ f(x) = x^2 + 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Exercice 2

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations de la fonction g .
2. Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1], g(x) < 0)$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ telle que : $1 < \alpha < 2$.
4. Donner une approximation du nombre α sur $]1; 2[$ à la précision 0,25.



5. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Montrer que : $\forall x \in] -1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $] -1; +\infty[$.

4. Montrer que : $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{2(1+\alpha^2)}$.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

1/ (a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a : $f'(x) = \frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$.

(c) Dresser le tableau de variation de f .

2/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $] -1, 1[$. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} , définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

3/ (a) Montrer que la fonction g est impaire.

(b) Déduire la parité de la fonction g^{-1} .

4/ (a) Calculer $g^{-1}(0)$

(b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

5/ Résoudre dans J l'équation : $g^{-1}(x) - x = 0$

BON COURAGE