



Modèle 3

Devoir surveillé n°1



1 BAC SECO

S. EL JAAFARI



I– Énoncés des exercices



Exercice 1

1/ a) Donner la négation des propositions suivantes :

* $P : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 0"$.

* $Q : "(\exists a \in \mathbb{R}) : a^2 < a"$.

b) Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

* $R : "(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2x + 3 \geq 0"$

* $S : "(\forall x > 0) : \frac{1}{x} < x"$

2/ Démontrer par l'absurde que : $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

3/ Soient a et b deux réels, montrer par contraposition que :

$$(a \neq b \text{ et } a + b \neq -1) \implies (a^2 + a \neq b^2 + b)$$

4/ Démontrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 9 + 13 + 17 + \dots + (4n + 5) = n(2n + 7)$$



Exercice 2

Partie A :

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

• $(E_1) : (4x + 6)(3 - 7x) = 0$

• $(E_2) : 2x^2 - x - 6 = 0$

• $(E_3) : x^2 = 16$

• $(E_4) : 4x^2 - 20x + 25 = 0$

• $(E_5) : 3x^2 + x + 5 = 0$

2/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

• $(I_1) : (2x + 5)(2 - x) \leq 0$

• $(I_2) : 3x^2 - 5x + 2 > 0$

• $(I_3) : \frac{-x^2 + 3x - 4}{5 - 2x} < 0$



Partie B :

Une entreprise marocaine produit et commercialise un produit X.

- La quantité demandée par les consommateurs (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire x (en Dirhams) est donnée par : $D(x) = -2x + 50$.
- La quantité offerte par l'entreprise (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire x (en Dirhams) est donnée par : $O(x) = x + 11$.
- Le coût total de production (en milliers de Dirhams) pour une quantité q produite est modélisé par : $C(q) = q^2 - 3q + 15$.

1/ Déterminer le prix d'équilibre.

2/ Déterminer la zone de rentabilité.

3/ Quelle quantité, l'entreprise doit-elle produire pour que le bénéfice soit maximal ? et quel sera le montant de ce bénéfice ?



Exercice 3

Partie I :

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ le système linéaire suivant, en utilisant la méthode de votre choix.

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 4x + 7y = 225 \end{cases}$$

Partie II :

Un cabinet de conseil financier à Casablanca organise un séminaire de formation sur deux jours. Au total, **45 participants** ont assisté à cet événement. Le cabinet propose deux types de tarifs :

- Un **tarif étudiant (A)** fixé à **200 Dirhams** par personne.
- Un **tarif professionnel (B)** fixé à **350 Dirhams** par personne.

A la fin de cet événement, la recette totale perçue par le cabinet s'élève à **11 250 Dirhams**. Déterminer le nombre d'étudiants et le nombre de professionnels qui ont participé à ce séminaire.





II– Corrigés de exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ a) Négation des propositions P et Q

- Négation de P :

$$\overline{P} : "(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y \neq 0"$$

- Négation de Q :

$$\overline{Q} : "(\forall a \in \mathbb{R}) : a^2 \geq a"$$

b) Valeur de vérité des propositions R et S

- Proposition R : " $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2x + 3 \geq 0$ "

Fausse. En effet, il suffit de trouver un contre-exemple. Pour $x = -2 \in \mathbb{R}$, on a $2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$, et $-1 < 0$.

- Proposition S : " $(\forall x > 0) : \frac{1}{x} < x$ "

Fausse. Prenons par exemple $x = \frac{1}{2} > 0$. On a $\frac{1}{x} = 2$ et $x = \frac{1}{2}$. Or $2 > \frac{1}{2}$, donc l'inégalité n'est pas vérifiée pour tout $x > 0$.

2/ Démonstration par l'absurde : $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Supposons par l'absurde que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, avec la fraction $\frac{p}{q}$ **irréductible**.

En élevant au carré, on obtient :

$$5 = \frac{p^2}{q^2} \implies p^2 = 5q^2$$

Cela implique que p^2 est un multiple de 5. Comme 5 est un nombre premier, alors p est aussi un multiple de 5. Il existe donc un entier k tel que $p = 5k$.

En remplaçant dans l'égalité $p^2 = 5q^2$, on a :

$$(5k)^2 = 5q^2 \implies 25k^2 = 5q^2 \implies 5k^2 = q^2$$

Cela implique que q^2 est un multiple de 5, et donc que q est aussi un multiple de 5.

Conclusion : p et q sont tous les deux des multiples de 5, ce qui contredit le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible. Par conséquent, notre supposition est fausse, et on en déduit que :

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$$

3/ Démonstration par contraposition

Pour montrer l'implication $A \implies B$ par contraposition, on montre son équivalente $\overline{B} \implies \overline{A}$. On veut donc prouver que :

$$(a^2 + a = b^2 + b) \implies (a = b \text{ ou } a + b = -1)$$

Supposons que $a^2 + a = b^2 + b$. Alors :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a - b &= 0 \implies (a - b)(a + b) + (a - b) = 0 \\ &\implies (a - b)[(a + b) + 1] = 0 \\ &\implies (a - b) = 0 \text{ ou } (a + b + 1) = 0 \\ &\implies a = b \text{ ou } a + b = -1 \end{aligned}$$

La contraposée est vérifiée, l'implication de départ est donc démontrée.



4/ Démonstration par récurrence

Soit la proposition $P(n) : 9 + 13 + 17 + \dots + (4n + 5) = n(2n + 7)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$. Le premier terme de la somme (pour $n = 1$) est $4(1) + 5 = 9$.
Le membre de droite vaut $1 \times (2(1) + 7) = 1 \times 9 = 9$.
La propriété $P(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$9 + 13 + 17 + \dots + (4n + 5) = n(2n + 7)$$

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que la relation reste vraie au rang suivant :

$$[9 + 13 + 17 + \dots + (4n + 5)] + (4(n + 1) + 5) = (n + 1)(2(n + 1) + 7)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour la partie entre crochets, on a :

$$\begin{aligned} [9 + 13 + 17 + \dots + (4n + 5)] + (4(n + 1) + 5) &= n(2n + 7) + (4n + 4 + 5) \\ &= 2n^2 + 7n + 4n + 9 \\ &= 2n^2 + 11n + 9 \end{aligned}$$

Développons maintenant le résultat attendu pour $P(n + 1)$:

$$\begin{aligned} (n + 1)(2(n + 1) + 7) &= (n + 1)(2n + 2 + 7) \\ &= (n + 1)(2n + 9) \\ &= 2n^2 + 9n + 2n + 9 \\ &= 2n^2 + 11n + 9 \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales, l'hérédité est prouvée.

- **Conclusion** : Par le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$9 + 13 + 17 + \dots + (4n + 5) = n(2n + 7)$$

✓ Solution Exercice 2

Partie A :

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(E_1) : (4x + 6)(3 - 7x) = 0 \iff 4x + 6 = 0 \text{ ou } 3 - 7x = 0 \iff x = \frac{-6}{4} \text{ ou } x = \frac{3}{7}$
 $\iff x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{7}$

Alors :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{7} \right\}$$

- $(E_2) : 2x^2 - x - 6 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (2) \times (-6) = 49$ donc $\Delta > 0$ par conséquent l'équation (E_2) admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{4} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{4} = 2. \text{ Alors :}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2}, 2 \right\}$$



- $(E_3): x^2 = 16 \iff x = 4 \text{ ou } x = -4$ Alors :

$$\mathcal{S} = \{-4, 4\}$$

- $(E_4): 4x^2 - 20x + 25 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 25 = 0$ donc l'équation (E_4) admet une solution double $x_0 = \frac{-b}{a} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Alors :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

- $(E_5): 3x^2 + x + 5 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 \times 5 = -59$ donc $\Delta < 0$ par conséquent l'équation (E_5) n'admet aucune solution réelle. Alors :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $(I_1): (2x + 5)(2 - x) \leq 0$

On a $2x + 5 = 0 \iff x = -\frac{5}{2}$ et $2 - x = 0 \iff x = 2$. On dresse le tableau de signe du produit :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$
$2x + 5$		-	0	+
$2 - x$		+	0	-
$(2x + 5)(2 - x)$		-	0	+

D'après le tableau de signe on a :

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{5}{2}, 2 \right]$$

- $(I_2): 3x^2 - 5x + 2 > 0$.

En posant $a = 3, b = -5, c = 2$ le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$ donc $\Delta > 0$ alors l'équation $3x^2 - 5x + 2 = 0$ admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{6} = 1$. Comme $a = 3 > 0$ on a le signe du trinôme $3x^2 - 5x + 2$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. D'où le tableau de signe du trinôme est :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 - 5x + 2$		+	0	-

Alors :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right[\cup] 1, +\infty [$$



• $(I_3) : \frac{-x^2 + 3x - 4}{5 - 2x} < 0.$

Déterminons le signe de $-x^2 + 3x - 4$ et de $5 - 2x$.

$-x^2 + 3x - 4$ est un trinôme dont le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 9 - 16 = -7$ donc $\Delta < 0$ par conséquent le signe de $-x^2 + 3x - 4$ est le même que celui de (-1) on peut donc

dresser le tableau de signe de $\frac{-x^2 + 3x - 4}{5 - 2x}$:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 3x - 4$	-	-	-
$5 - 2x$	+	0	-
$\frac{-x^2 + 3x - 4}{5 - 2x}$	-		+

Alors :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{5}{2} \right[$$

Partie B :

1/ Détermination du prix d'équilibre

L'équilibre du marché est atteint lorsque la quantité offerte par l'entreprise est égale à la quantité demandée par les consommateurs, c'est-à-dire :

$$O(x) = D(x)$$

En remplaçant par les expressions de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned} x + 11 &= -2x + 50 \implies x + 2x = 50 - 11 \\ &\implies 3x = 39 \\ &\implies x = \frac{39}{3} = 13 \end{aligned}$$

Conclusion : Le prix d'équilibre du marché est de 13 Dirhams.

À ce prix, la quantité d'équilibre échangée sur le marché est :

$$q = O(13) = 13 + 11 = 24 \text{ (soit 24 000 unités).}$$

2/ Détermination de la zone de rentabilité

L'entreprise vend sa production au prix d'équilibre $x = 13$ Dirhams. La fonction de recette totale est donc donnée par $R(q) = 13q$.

L'entreprise réalise un profit si son bénéfice $B(q)$ est strictement positif, soit $R(q) - C(q) > 0$.

Exprimons la fonction de bénéfice $B(q)$:

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 13q - (q^2 - 3q + 15) \\ &= -q^2 + 16q - 15 \end{aligned}$$

Résolvons l'inéquation du second degré : $-q^2 + 16q - 15 > 0$.



- **Calcul du discriminant (Δ) :** avec $a = -1$, $b = 16$ et $c = -15$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4(-1)(-15) = 256 - 60 = 196$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme possède deux racines réelles distinctes ($\sqrt{196} = 14$) :

$$q_1 = \frac{-16 - 14}{2(-1)} = \frac{-30}{-2} = 15 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-16 + 14}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

- **Tableau de signes du bénéfice :**

q	$-\infty$	1	15	$+\infty$		
$B(q)$		-	0	+	0	-

Conclusion : Le bénéfice est strictement positif entre les deux racines. La **zone de rentabilité** de l'entreprise s'étend pour une quantité de production comprise **entre 1 et 15 (soit entre 1 000 et 15 000 unités)**, soit l'ensemble-solution :

$$S =]1 ; 15[$$

3/ Quantité pour un bénéfice maximal et montant de ce bénéfice

La fonction de bénéfice $B(q) = -q^2 + 16q - 15$ est une fonction de second degré sous forme d'une parabole orientée vers le bas ($a = -1 < 0$). Elle admet un maximum au sommet de coordonnées $(\alpha ; \beta)$.

- **Quantité optimale (q_0) :**

$$q_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-1)} = \frac{16}{2} = 8$$

L'entreprise doit donc produire et vendre **8 (soit 8 000 unités)** pour maximiser son profit.

- **Montant du bénéfice maximal ($B(8)$) :**

$$B(8) = -(8)^2 + 16(8) - 15 = -64 + 128 - 15 = 49$$

Conclusion : Pour obtenir un **bénéfice maximal**, l'entreprise doit produire **8 000 unités**, et le montant de ce bénéfice sera de **49 000 Dirhams** (puisque le coût et la recette sont exprimés en milliers de Dirhams).

✓ Solution Exercice 3

Partie I : Résolution du système linéaire

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 4x + 7y = 225 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du déterminant (méthode de Cramer) :

1. **Calcul du déterminant principal (Δ) :**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = (1 \times 7) - (1 \times 4) = 7 - 4 = 3$$



Comme $\Delta \neq 0$, le système admet un couple unique de solutions $(x; y)$.

2. Calcul du déterminant lié à x (Δ_x) :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 45 & 1 \\ 225 & 7 \end{vmatrix} = (45 \times 7) - (1 \times 225) = 315 - 225 = 90$$

3. Calcul du déterminant lié à y (Δ_y) :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 45 \\ 4 & 225 \end{vmatrix} = (1 \times 225) - (45 \times 4) = 225 - 180 = 45$$

4. Détermination des solutions :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{90}{3} = 30$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{45}{3} = 15$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est : $S = \{(30; 15)\}$.

Partie II : Application économique

1. Choix des inconnues :

- Soit x le nombre d'étudiants ayant participé au séminaire.
- Soit y le nombre de professionnels ayant participé au séminaire.

2. Mise en équation du problème :

- Le nombre total de participants est de 45, d'où :

$$x + y = 45$$

- La recette totale s'élève à 11 250 Dirhams, d'où :

$$200x + 350y = 11250$$

3. Simplification du système : En divisant tous les termes de la deuxième équation ($200x + 350y = 11250$) par 50, on obtient :

$$\frac{200}{50}x + \frac{350}{50}y = \frac{11250}{50} \implies 4x + 7y = 225$$

Le système se ramène donc exactement à celui résolu dans la **Partie I** :

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 4x + 7y = 225 \end{cases}$$

4. Conclusion économique : D'après les résultats de la Partie I, on en déduit directement sans calcul supplémentaire que le cabinet a accueilli :

- **30 étudiants** ($x = 30$)
- **15 professionnels** ($y = 15$)