



Devoir surveillé n°1

Modèle 3

1 BAC SM

S. EL JAAFARI



Exercice 1

1. Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs tels que $abc = 1$.

Montrer par l'absurde la proposition suivante :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c \right) \implies (a \leq 1 \text{ ou } b \leq 1 \text{ ou } c \leq 1)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante en utilisant une disjonction de cas rigoureuse :

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |2x - 1| = 3$$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n tel que $n \geq 4$ on a l'inégalité suivante :

$$2^n < n!$$

5. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficient dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(2) = 5$ et $P(6) = 11$.



Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E , on note Δ l'opération de différence symétrique définie par : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrer que pour toutes parties A, B et C de E :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

2. On considère dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation d'inconnue X suivante :

$$A \Delta X = B$$

- (a) Montrer que si cette équation admet une solution X , alors cette solution est unique et s'exprime nécessairement sous la forme $X = A \Delta B$.
(b) Vérifier que la partie $X = A \Delta B$ est effectivement solution de l'équation.



Exercice 3

Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1. L'application f est-elle injective ? Justifier rigoureusement votre réponse.
2. Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$. L'application f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. On considère la restriction g de f définie de $[-1, 1]$ vers $[-1, 1]$.
 - (a) Montrer que g est une application bijective.
 - (b) Déterminer explicitement l'expression de sa bijection réciproque $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.



Exercice 4

Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E .

On considère l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad \Phi(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Montrer que : Φ est injective $\iff A \cup B = E$.
2. Montrer que : Φ est surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que Φ soit bijective. Exprimer alors explicitement $\Phi^{-1}(Y, Z)$ pour tout $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Bon courage