



Série Corrigée 1

Logique et Raisonnement



1 BAC SM

S. EL JAAFARI

Table des matières

I Énoncés des exercices	1
II Corrigés des exercices	3

I– Énoncés des exercices

Exercice 1

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \geq 1$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}), x^2 - 2 = 0$$

$$P_3 : (\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$$

$$P_4 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}), n < m$$

$$P_5 : (\exists n \in \mathbb{N}), 2n + 1 \text{ est pair}$$

$$P_6 : (\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}), b - a > 0$$

$$P_7 : (\exists! x \in \mathbb{Z}), \frac{x}{4} + 1 \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2

Soient P, Q, R des propositions. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$P_1 : \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

$$[P_2 :] \overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$$

$$P_3 : [P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$$

$$[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

Exercice 3

Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :

$$P_1 : \text{Le carré de tout nombre réel est positif.}$$

$$P_2 : \text{Certains nombres réels sont supérieurs à leur carré.}$$

$$P_3 : \text{Aucun entier naturel n'est supérieurs à tous les autres.}$$



P_4 : Tous les nombres réels ne sont pas rationnels.

P_5 : Entre deux réels distincts quelconques existe un rationnel.



Exercice 4 : Raisonnement direct

1/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que : $\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

3/ Montrer que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2}) ; x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

4/ Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) ; a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

5/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$



Exercice 5 : Raisonnement par disjonction des cas

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$a/ |x - 2| = 3$$

$$b/ |2x| - |x + 1| = 5$$

$$c/ |2 - x| + 3x + 2 = |x + 5| \quad d/ x^2 - |x - 2| + 1 = 0$$

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3



Exercice 6 : Raisonnement par la contraposée

1/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

2/ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair

4/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$



Exercice 7 : Raisonnement par l'absurde

1/ Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que : $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$

2/ Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3/ Montrer que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$



Exercice 8 : Raisonnement par contre exemple



- 1/ Montrer que la proposition $P : "(\forall x \in [0, 1]); x^2 \geq x"$ est fausse.
- 2/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$.
Montrer que la fonction f n'est ni paire ni impaire.
- 3/ Montrer que la proposition $Q : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0"$ est fausse.



Exercice 9 : Raisonnement par équivalences successives

- 1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}.$$

- 2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : \sqrt{x^2 + 1} = 2x$.

- 3/ a) Montrer que : $(\forall (a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2) ; a + b = 0 \iff a = b = 0$.
b) En déduire que : $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) ;$

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \iff x = y = 0.$$



Exercice 10 : Raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence que :

- 1/ $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^n \geq 1 + 2n$
- 2/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5) ; 2^n \geq 6n$
- 3/ $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n^3 + 2n$ est divisible par 3
- 4/ $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9
- 5/ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6) ; 2^n \geq (n + 2)^2$
- 6/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- 7/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 8/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- 9/ $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- 10/ $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$



II– Corrigés des exercices

✓ Solution exercice 1

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes : [cite : 1]

Prop.	Proposition	Négation	Valeur
P_1	$(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \geq 1$	$(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 < 1$	Fausse
P_2	$(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 - 2 = 0$	$(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 - 2 \neq 0$	Vraie
P_3	$(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$	$(\exists n \in \mathbb{N}), \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$	Fausse
P_4	$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}), n < m$	$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}), n \geq m$	Vraie
P_5	$(\exists n \in \mathbb{N}), 2n + 1$ est pair	$(\forall n \in \mathbb{N}), 2n + 1$ est impair	Fausse
P_6	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}), b - a > 0$	$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}), b - a \leq 0$	Vraie
P_7	$(\exists! x \in \mathbb{Z}), \frac{x}{4} + 1 \in \mathbb{Z}$	$(\forall x \in \mathbb{Z})$ ou $(\exists x, y \dots)$	Fausse

✓ Solution exercice 2

• $P_1 : \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$ est une loi logique appelée "Loi de Morgan"

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	P_1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

• $P_2 : \overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$ est une loi logique appelée "Loi de Morgan"

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	P_2
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

• $P_3 : [P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ est une loi logique.



P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	P_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

• $P_3 : [P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ est une loi logique.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	P_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

✓ Solution exercice 3

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0.$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x > x^2.$$

$$P_3 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : n < m$$

$$P_4 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x \notin \mathbb{Q}.$$

$$P_5 : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) [x < y \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q}) : x < q < y]$$

✓ Solution exercice 4

1/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$. On a d'une part :

$$0 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

D'autre part :

$$0 < y < 2 \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$$

En sommant ces deux inégalités strictes de même sens, on obtient directement :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$$



La proposition est donc démontrée.

- 2/ Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Supposons que $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$. En multipliant les deux membres par $(1 + \sqrt{x})$ (qui est strictement positif donc non nul), on obtient :

$$1 = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$$

On reconnaît une identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$1 = 1^2 - (\sqrt{x})^2 \implies 1 = 1 - x$$

En retranchant 1 des deux côtés, il vient :

$$0 = -x \implies x = 0$$

L'implication est validée.

- 3/ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$ tel que $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$. Regroupons tous les termes du même côté de l'égalité :

$$x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y} + 2 = 0$$

On peut séparer la constante 2 en 1 + 1 pour faire apparaître des identités remarquables :

$$(x - 2\sqrt{x} + 1) + (y - 2\sqrt{y} + 1) = 0$$

Puisque x et y sont positifs, on peut écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et $y = (\sqrt{y})^2$:

$$((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1) + ((\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} + 1) = 0$$

$$(\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 0$$

La somme de deux carrés de nombres réels est nulle si et seulement si chaque carré est nul :

$$\begin{cases} (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \\ (\sqrt{y} - 1)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y} - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

On a bien $x = y = 1$.

- 4/ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. On sait que pour tout couple de réels, le carré de leur différence est positif ou nul :

$$(a - b)^2 \geq 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Comme $a^2 + b^2 = 1$, on en déduit que :

$$1 \geq 2ab$$

Ajoutons $a^2 + b^2$ (qui vaut toujours 1) des deux côtés de cette inégalité :

$$(a^2 + b^2) + 1 \geq (a^2 + b^2) + 2ab$$

$$1 + 1 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$2 \geq (a + b)^2$$

En prenant la racine carrée des deux côtés (rappel : $\sqrt{X^2} = |X|$), on obtient :

$$|a + b| \leq \sqrt{2}$$

L'implication est démontrée.



5/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Analysons la fraction $\frac{n+1}{n+2}$. On remarque que pour tout entier naturel n :

$$n+1 < n+2$$

Puisque $n+2 > 0$, on peut diviser l'inégalité par $n+2$, ce qui donne :

$$\frac{n+1}{n+2} < 1$$

De plus, comme $n \geq 0$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc :

$$0 < \frac{n+1}{n+2}$$

On a ainsi encadré notre fraction entre deux entiers consécutifs :

$$0 < \frac{n+1}{n+2} < 1$$

Il n'existe aucun entier naturel strictement compris entre 0 et 1. Par conséquent :

$$\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$$

✓ Solution exercice 5

1/ Résolution des équations

a) **Équation** : $|x-2| = 3$ Par définition de la valeur absolue, deux cas se présentent :

- **1er cas** : $x-2 = 3 \implies x = 5$
- **2ème cas** : $x-2 = -3 \implies x = -1$

Les deux solutions appartiennent bien à $\mathbb{R}$. Ainsi : $\mathcal{S} = \{-1; 5\}$.

b) **Équation** : $|2x| - |x+1| = 5$ Étudions le signe des expressions sous les valeurs absolues : $2x$ s'annule en 0 et $x+1$ s'annule en -1 . Nous dressons trois cas d'étude :

- **1er cas** : $x \in]-\infty, -1]$
L'équation devient : $-2x - (-(x+1)) = 5 \implies -2x + x + 1 = 5 \implies -x = 4 \implies x = -4$.
Comme $-4 \in]-\infty, -1]$, c'est une solution valide.
- **2ème cas** : $x \in]-1, 0]$
L'équation devient : $-2x - (x+1) = 5 \implies -3x - 1 = 5 \implies -3x = 6 \implies x = -2$.
Or, $-2 \notin]-1, 0]$, cette valeur est rejetée.
- **3ème cas** : $x \in]0, +\infty[$
L'équation devient : $2x - (x+1) = 5 \implies x - 1 = 5 \implies x = 6$.
Comme $6 \in]0, +\infty[$, c'est une solution valide.

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{-4; 6\}$.

c) **Équation** : $|2-x| + 3x + 2 = |x+5|$ Les valeurs charnières sont $x = 2$ et $x = -5$. Analysons les trois intervalles :

- **1er cas** : $x \in]-\infty, -5]$
L'équation s'écrit : $(2-x) + 3x + 2 = -(x+5) \implies 2x + 4 = -x - 5 \implies 3x = -9 \implies x = -3$.
Or, $-3 \notin]-\infty, -5]$, cette valeur est rejetée.



- **2ème cas :** $x \in]-5, 2]$

L'équation s'écrit : $(2-x) + 3x + 2 = x + 5 \implies 2x + 4 = x + 5 \implies x = 1$.

Comme $1 \in]-5, 2]$, c'est une solution valide.

- **3ème cas :** $x \in]2, +\infty[$

L'équation s'écrit : $-(2-x) + 3x + 2 = x + 5 \implies 4x = x + 5 \implies 3x = 5 \implies x = \frac{5}{3}$.

Or, $\frac{5}{3} \approx 1.67 \notin]2, +\infty[$, cette valeur est rejetée.

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{1\}$.

d) **Equation :** $x^2 - |x - 2| + 1 = 0$ Le signe dépend de la position de x par rapport à 2 :

- **1er cas :** $x \in]-\infty, 2]$

L'équation devient : $x^2 - (-(x-2)) + 1 = 0 \implies x^2 + x - 2 + 1 = 0 \implies x^2 + x - 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(1)(-1) = 5$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1.62 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.62$$

Ces deux valeurs sont inférieures à 2, elles sont donc acceptées.

- **2ème cas :** $x \in]2, +\infty[$

L'équation devient : $x^2 - (x - 2) + 1 = 0 \implies x^2 - x + 3 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = -11$. Pas de solution réelle dans ce cas.

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

2/ **Divisibilité par 3** Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout entier naturel n peut s'écrire sous l'une des trois formes suivantes selon son reste dans la division euclidienne par 3 : $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$ (où $k \in \mathbb{N}$). Posons $P(n) = n(n+1)(n+2)$.

- **1er cas :** $n = 3k$

$$P(3k) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3 \times [k(3k+1)(3k+2)].$$

C'est un multiple de 3.

- **2ème cas :** $n = 3k + 1$

$$P(3k+1) = (3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3).$$

$$\text{En factorisant le dernier terme : } P(3k+1) = 3 \times [(3k+1)(3k+2)(k+1)].$$

C'est un multiple de 3.

- **3ème cas :** $n = 3k + 2$

$$P(3k+2) = (3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4).$$

$$\text{En factorisant le deuxième terme : } P(3k+2) = 3 \times [(3k+2)(k+1)(3k+4)].$$

C'est un multiple de 3.

Dans tous les cas, le produit de trois entiers consécutifs $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

✓ Solution exercice 6

Rappel : Montrer $P \implies Q$ par contraposée revient à montrer que $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons par contraposée que :

$$(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

Par la loi de Morgan, la négation de la conclusion est $2x + 2y - xy - 2 = 2$ et la négation de



l'hypothèse est $(x = 2 \text{ ou } y = 2)$. On a :

$$\begin{aligned} 2x + 2y - xy - 2 = 2 &\Rightarrow 2x + 2y - xy - 4 = 0 \\ &\Rightarrow (2x - 4) + (2y - xy) = 0 \\ &\Rightarrow 2(x - 2) - y(x - 2) = 0 \\ &\Rightarrow (x - 2)(2 - y) = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad y = 2 \end{aligned}$$

La contraposée est démontrée. Alors

$$(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Montrons par contraposée que : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$.

Soit $x \neq -5$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x+5} = 2 &\Rightarrow x+2 = 2(x+5) \\ &\Rightarrow x+2 = 2x+10 \\ &\Rightarrow x-2x = 10-2 \\ &\Rightarrow x = -8 \end{aligned}$$

La contraposée est vérifiée. Alors :

$$x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par contraposée que : n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair.

La négation de « n est pair» est « n est impair».

$$\begin{aligned} n \text{ est impair} &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &\Rightarrow (\exists k' = 2k^2 + 2k) : n^2 = 2k' + 1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ est impair.} \end{aligned}$$

La contraposée est validée. Alors :

$$n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$$

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons par contraposée que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) &\Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ &\Rightarrow -x + y = x - y \\ &\Rightarrow 2y = 2x \\ &\Rightarrow y = x \end{aligned}$$

La contraposée est démontrée. Alors :

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Solution exercice 7

Rappel : Pour montrer la proposition $P \Rightarrow Q$ par **un raisonnement par l'absurde**, On suppose que P est vraie et Q est fausse et on arrive nécessairement à une contradiction soit avec les données, ou intramathématique (exemple $1=0$).

1/ Montrons par l'absurde que : si $a > 0$ et $b > 0$, alors : $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$. Soit $a > 0$ et $b > 0$, supposons que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} &\Rightarrow a(1+a) = b(1+b) \\ &\Rightarrow a^2 + a = b^2 + b \\ &\Rightarrow a^2 - b^2 + a - b = 0 \\ &\Rightarrow (a-b)(a+b+1) = 0 \\ &\Rightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a+b+1 = 0 \end{aligned}$$

Or $a > 0$ et $b > 0$ donc $a+b+1 \neq 0$ et $a \neq b$ ce qui est absurde. Alors $a = b$ d'après le raisonnement par l'absurde. D'où :

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

2/ **Montrons que :** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(p, q) = 1 \quad (\text{la fraction est irréductible})$$

En élevant au carré, on obtient :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Cela signifie que p^2 est pair. Or, le carré d'un nombre est pair si et seulement si ce nombre est pair. Donc p est pair. Il existe alors un entier k tel que $p = 2k$.

En remplaçant p par $2k$ dans l'égalité $p^2 = 2q^2$, on obtient :

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Cela signifie que q^2 est pair, et par conséquent q est également pair.

Puisque p et q sont tous les deux pairs, leur plus grand commun diviseur est au moins égal à 2 ($\text{pgcd}(p, q) \geq 2$). Cela contredit l'hypothèse de départ selon laquelle la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible ($\text{pgcd}(p, q) = 1$).

On en conclut que l'hypothèse de supposition est fausse, d'où $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3/ **Montrons que :** $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que :

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(p, q) = 1$$

En élevant au carré, on obtient :

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 3q^2$$



Cela signifie que p^2 est un multiple de 3. Si un carré est un multiple de 3, alors sa racine p est aussi un multiple de 3. Il existe donc un entier k tel que $p = 3k$.

En remplaçant p par $3k$ dans l'égalité $p^2 = 3q^2$, on obtient :

$$(3k)^2 = 3q^2 \implies 9k^2 = 3q^2 \implies q^2 = 3k^2$$

Cela signifie que q^2 est un multiple de 3, et par conséquent q est aussi un multiple de 3.

Puisque p et q sont tous les deux des multiples de 3, leur plus grand commun diviseur est au moins égal à 3 ($\text{pgcd}(p, q) \geq 3$). Cela contredit l'hypothèse de départ selon laquelle $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

On en conclut que l'hypothèse de supposition est fausse, d'où $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

✓ Solution exercice 8

Rappel : Pour montrer qu'une proposition universelle ($\forall x \in I, A(x)$) est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire trouver un élément $x_0 \in I$ pour lequel la propriété n'est pas vérifiée.

1/ Montrons que la proposition $P : "(\forall x \in [0, 1]); x^2 \geq x"$ est fausse.

Choisissons par exemple $x_0 = \frac{1}{2}$. On a bien $\frac{1}{2} \in [0, 1]$.

- D'une part : $x_0^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- D'autre part : $x_0 = \frac{1}{2}$
- On constate que : $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, soit $x_0^2 < x_0$.

L'inégalité $x^2 \geq x$ n'est donc pas vérifiée pour $x_0 = \frac{1}{2}$.

La proposition P est donc **fausse**.

2/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Montrons que f n'est ni paire ni impaire.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit de trouver un contre-exemple numérique (généralement en calculant $f(1)$ et $f(-1)$).

Calculons les images de 1 et -1 par f :

- $f(1) = 2(1)^2 - 1 + 3 = 2 - 1 + 3 = 4$
- $f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) + 3 = 2 + 1 + 3 = 6$

Vérifions les définitions de parité :

- $f(-1) \neq f(1)$ car $6 \neq 4$, donc la fonction f **n'est pas paire**.
- $f(-1) \neq -f(1)$ car $6 \neq -4$, donc la fonction f **n'est pas impaire**.

Par conséquent, la fonction f n'est **ni paire ni impaire**.

3/ Montrons que la proposition $Q : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0"$ est fausse.

Trouvons un contre-exemple en fixant une valeur pour x . Choisissons $x = 1$. L'équation devient alors : $y^2 - y + 1 = 0$.

Étudions cette équation du second degré en y en calculant son discriminant Δ :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

Puisque $\Delta < 0$, cette équation n'admet aucune solution réelle y . Autrement dit, pour $x = 1$, il n'existe aucun réel y tel que $1 - y + y^2 = 0$. Donc la proposition Q est fausse.

 Solution exercice 9


1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
 |x - 1| \leq \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\
 &\iff \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\
 &\iff \frac{3}{2} \leq x + 1 \leq \frac{5}{2}. \qquad \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}.$$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 1} = 2x &\iff 2x \geq 0 \text{ et } x^2 + 1 = (2x)^2 \\
 &\iff x \geq 0 \text{ et } 3x^2 = 1 \\
 &\iff x \geq 0 \text{ et } \left(x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
 &\iff x = \frac{\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$.

3/ a) Soit $(a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

($\Leftarrow$) Si $a = b = 0$, alors $a + b = 0$.

($\Rightarrow$) Supposons $a + b = 0$. Alors $a = -b$. Comme $b \geq 0$, on a $a \leq 0$. Or $a \geq 0$, donc $a = 0$.
On en déduit $b = -a = 0$.

Donc $a + b = 0 \iff a = b = 0$.

b) Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Posons

$$a = \sqrt{x^2 + 1} - 1 \quad \text{et} \quad b = \sqrt{y^2 + 1} - 1.$$

Comme $x^2 + 1 \geq 1$, on a $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$, donc $a \geq 0$. De même $b \geq 0$.

Ainsi $(a; b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, et :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 &\iff a + b = 0 \\
 &\iff a = b = 0 \quad (\text{d'après la question 3/a/}) \\
 &\iff \sqrt{x^2 + 1} = 1 \text{ et } \sqrt{y^2 + 1} = 1 \\
 &\iff x^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \\
 &\iff x = y = 0.
 \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \iff x = y = 0$.

 Solution exercice 10


1/ Soit $P(n)$: « $3^n \geq 1 + 2n$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $3^0 = 1 \geq 1 + 0 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $3^n \geq 1 + 2n$. Alors

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(1 + 2n) = 3 + 6n \geq 3 + 2n = 1 + 2(n + 1),$$

car $6n \geq 2n$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3^n \geq 1 + 2n$.

2/ Soit $P(n)$: « $2^n \geq 6n$ » pour $n \geq 5$.

Initialisation. Pour $n = 5$: $2^5 = 32 \geq 30 = 6 \times 5$. Donc $P(5)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 5$; supposons $2^n \geq 6n$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 12n = 6n + 6n \geq 6n + 6 = 6(n + 1),$$

car $6n \geq 6$ (puisque $n \geq 5$). Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5) ; 2^n \geq 6n$.

3/ Soit $P(n)$: « $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $0^3 + 2 \times 0 = 0 = 3 \times 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $n^3 + 2n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 + 2(n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\ &= 3k + 3(n^2 + n + 1) = 3(k + n^2 + n + 1), \end{aligned}$$

avec $k + n^2 + n + 1 \in \mathbb{N}$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}) ; n^3 + 2n$ est divisible par 3.

4/ Soit $P(n)$: « $4^n + 6n - 1$ est divisible par 9 ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $4^0 + 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $4^n + 6n - 1 = 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$, donc $4^n = 9k - 6n + 1$. Alors

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 6(n + 1) - 1 &= 4 \times 4^n + 6n + 5 \\ &= 4(9k - 6n + 1) + 6n + 5 \\ &= 36k - 18n + 9 = 9(4k - 2n + 1), \end{aligned}$$

avec $4k - 2n + 1 \in \mathbb{Z}$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

5/ Soit $P(n)$: « $2^n \geq (n + 2)^2$ » pour $n \geq 6$.

Initialisation. Pour $n = 6$: $2^6 = 64 = 8^2 = (6 + 2)^2$. Donc $P(6)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 6$; supposons $2^n \geq (n + 2)^2$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n + 2)^2.$$

Or

$$2(n + 2)^2 - (n + 3)^2 = 2n^2 + 8n + 8 - n^2 - 6n - 9 = n^2 + 2n - 1 > 0$$

car $n \geq 6$. Donc $2^{n+1} \geq 2(n + 2)^2 \geq (n + 3)^2 = ((n + 1) + 2)^2$: $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6) ; 2^n \geq (n + 2)^2$.



6/ Soit $P(n) : \ll 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \gg$.

Initialisation. Pour $n = 1 : 1 = \frac{1 \times 2}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

7/ Soit $P(n) : \ll 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg$.

Initialisation. Pour $n = 1 : 1^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

C'est bien $\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

8/ Soit $P(n) : \ll 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg$.

Initialisation. Pour $n = 1 : 1^3 = 1 = \frac{1 \times 4}{4}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

9/ Soit $P(n) : \ll 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \gg$.

Initialisation. Pour $n = 0 : 1 = 2^1 - 1$. Donc $P(0)$ est vraie.



Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$1 + 2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

10/ Soit $P(n) : \ll 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \gg.$

Initialisation. Pour $n = 1 : 1 \times 2 = 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2) \left(\frac{n}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue ».

John von Neumann (pionnier de l'informatique et de la logique quantique) :