



T C S

Série Corrigée 1

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

S. EL JAAFARI



Table des matières

I Enoncés des exercices	1
II Corrigés des exercices	4

I– Enoncés des exercices



Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| a) $2n + 5$ est impair | c) $4n^2 + 2n + 8$ est pair |
| b) $n(n + 1)$ est pair | d) $n^2 + n + 3$ est impair |



Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la parité des nombres suivants :

- | | |
|-----------------------|------------------|
| 1/ $(2n + 1)(2n + 3)$ | 5/ $n^3 + 1$ |
| 2/ $2n^2 + 4n + 1$ | 6/ 3^{2n} |
| 3/ $5n^2 + n$ | 7/ 4^{2n+1} |
| 4/ $n^3 - 1$ | 8/ $n^2 + n + 2$ |



Exercice 3

- Déterminer tous les diviseurs de 34.
 - Déterminer les entiers naturels x et y tels que $(x + 1)(y + 2) = 34$.
- Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $(x + 1)(y - 2) = 13$.



Exercice 4

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 1) $(x + 1)(y + 1) = 9$ | 3) $x^2 - y^2 = 28$ |
| 2) $(x + 2)(y + 3) = 21$ | 4) $xy + x + 2y = 19$ |



Exercice 5

- 1) Montrer que 127 est premier.
- 2) Les nombres suivants sont-ils premiers ? 111 ; 251 ; 1001 et 51^2 .



Exercice 6

- 1) Donner les décompositions en produit de facteurs premiers des nombres suivants : 504 ; 1386 ; 16093.
- 2) Déterminer

PGCD(504, 1386) et PPCM(504, 1386)

PGCD(1386, 16093) et PPCM(1386, 16093)

PGCD(504, 16093) et PPCM(504, 16093)

- 3) Écrire les fractions suivantes sous leur forme irréductible : $\frac{504}{1386}$; $\frac{16093}{1386}$ et $\frac{504}{16093}$.



Exercice 7

On pose $a = 240$; $b = 135$.

- 1/ Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers a et b .
- 2/ Simplifier au maximum $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{ab}$.
- 3/ Calculer PGCD(a, b) et PPCM(a, b).
- 4/ Sans utiliser la calculatrice, calculer sous forme d'une fraction irréductible $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.



Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = (5n + 2)^2 - n(21n + 16) - 3$.

- 1/ Développer A .
- 2/ Montrer que A est un carré parfait.
- 3/ Déterminer la parité de A .



Exercice 9

Soit a, b deux entiers naturels tels que $a \wedge b = 12$.

- 1) Déterminer tous les diviseurs de a et b .
- 2) Sachant que $ab = 864$:
 - a) Calculer $a \vee b$.
 - b) En déduire les valeurs de a et b .



Exercice 10

On considère les entiers naturels $a = 1176$ et $b = 4950$.

- 1) Décomposer les nombres a et b en produit de facteurs premiers.
- 2) Déterminer le nombre des diviseurs de chacun des entiers a et b .
- 3) Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$.
- 4) Déterminer le plus petit entier naturel c tel que $a c$ soit un carré parfait.
- 5) Déterminer le plus petit entier naturel d tel que $b d$ soit un carré parfait.



Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- 1)
 - a) Développer et réduire l'expression $(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$.
 - b) En déduire que l'entier $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.
- 2) Montrer que le nombre 10101 n'est pas premier.



Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = 5^{n+2} - 5^n$ et $B = 3^{n+3} + 3^n$.

- 1) Écrire l'entier naturel A sous forme de produit de facteurs premiers.
- 2) Écrire l'entier naturel B sous forme de produit de facteurs premiers.
- 3) Déterminer selon les valeurs de n , $A \wedge B$ et $A \vee B$.
- 4) Donner selon les valeurs de n , la forme irréductible de la fraction $\frac{A}{B}$.



Exercice 13

Soit n et m deux entiers naturels.

- 1) Montrer que si $m = 3n + 1$, alors $m^2 - 1$ est divisible par 3.
- 2) Montrer que si $m = 3n + 2$, alors $m^2 + 2$ est divisible par 3.
- 3) Montrer que la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.
- 4) Montrer que si $(3n + 2m)$ et $(7n + 5m)$ sont multiples de 5, alors n est un multiple de 5.





II– Corrigés des exercices

✓ Solution Exercice 1

- a) $2n + 5 = 2(n + 2) + 1 = 2k + 1$ avec $k = n + 2 \in \mathbb{N}$, donc $2n + 5$ est impair.
- b) Raisonnons par étude de cas :
 Si n est pair, $n = 2k$, alors $n(n + 1) = 2k(n + 1)$ est pair.
 Si n est impair, $n = 2k + 1$, alors $n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ et $n(n + 1) = 2n(k + 1)$ est pair.
 Dans les deux cas, $n(n + 1)$ est pair.
- c) $4n^2 + 2n + 8 = 2(2n^2 + n + 4)$ avec $2n^2 + n + 4 \in \mathbb{N}$, donc il est pair.
- d) D'après la deuxième question, $n(n + 1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $n^2 + n + 3 = n(n + 1) + 3 = 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$, donc $n^2 + n + 3$ est impair.

✓ Solution Exercice 2

- 1/ $2n + 1$ et $2n + 3 = 2(n + 1) + 1$ sont impairs, et un produit de nombres impairs est impair. Donc $(2n + 1)(2n + 3)$ est **impair**.
- 2/ $2n^2 + 4n + 1 = 2(n^2 + 2n) + 1$ avec $n^2 + 2n \in \mathbb{N}$, donc ce nombre est **impair**.
- 3/ $5n^2 + n = 4n^2 + (n^2 + n) = 2 \times 2n^2 + n(n + 1)$. Or $n(n + 1)$ est pair (produit de deux entiers consécutifs), donc $5n^2 + n$ est somme de deux nombres pairs : il est **pair**.
- 4/ $n^3 - 1$: sa parité dépend de celle de n .
- si $n = 2k$, alors $n^3 - 1 = 8k^3 - 1 = 2(4k^3 - 1) + 1$ est impair ;
 - si $n = 2k + 1$, alors $n^3 - 1 = (2k + 1)^3 - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k)$ est pair.
- Ainsi $n^3 - 1$ est **impair si n est pair et pair si n est impair** (autrement dit, $n^3 - 1$ et n n'ont pas la même parité).
- 5/ $n^3 + 1$: de même,
- si $n = 2k$, alors $n^3 + 1 = 8k^3 + 1 = 2(4k^3) + 1$ est impair ;
 - si $n = 2k + 1$, alors $n^3 + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 2 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k + 1)$ est pair.
- Ainsi $n^3 + 1$ est **impair si n est pair et pair si n est impair**.
- 6/ $3^{2n} = 9^n$ est une puissance d'un nombre impair, donc un produit de nombres impairs : il est **impair**.
- 7/ $4^{2n+1} = 2 \times (2 \times 4^{2n})$ avec $2 \times 4^{2n} \in \mathbb{N}$, donc il est **pair**.
- 8/ $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$: somme de deux nombres pairs, donc **pair**.

✓ Solution Exercice 3

- 1) a) On a $34 = 2 \times 17$ avec 17 premier. Les diviseurs de 34 sont donc
- 1, 2, 17, 34.
- b) Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Alors $x + 1$ et $y + 2$ sont des entiers naturels qui divisent 34, avec $x + 1 \geq 1$



et $y + 2 \geq 2$. Comme leur produit vaut 34, on a :

$x + 1$	1	2	17	34
$y + 2$	34	17	2	1
x	0	1	16	33
y	32	15	0	-1
convient?	oui	oui	oui	non

La dernière colonne est rejetée car $y = -1 \notin \mathbb{N}$. Les solutions sont

$$(x, y) \in \{(0, 32), (1, 15), (16, 0)\}.$$

- 2) Soient $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $(x + 1)(y - 2) = 13$. Comme $x + 1 > 0$ et que le produit est positif, on a $y - 2 > 0$. Ainsi $x + 1$ et $y - 2$ sont des entiers naturels non nuls dont le produit est 13. Or 13 est premier, ses diviseurs sont 1 et 13 :

$x + 1$	1	13
$y - 2$	13	1
x	0	12
y	15	3

Les deux couples sont dans $\mathbb{N}^2$. Les solutions sont

$$(x, y) \in \{(0, 15), (12, 3)\}.$$

✓ Solution Exercice 4

- 1) $x + 1$ et $y + 1$ sont des entiers naturels non nuls dont le produit est 9. Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9 :

$x + 1$	1	3	9
$y + 1$	9	3	1
x	0	2	8
y	8	2	0

Les solutions sont $(x, y) \in \{(0, 8), (2, 2), (8, 0)\}$.

- 2) On a $x + 2 \geq 2$ et $y + 3 \geq 3$, et ce sont des diviseurs de 21. Les diviseurs de 21 sont 1, 3, 7 et 21.



Les valeurs $x + 2 = 1$ et $y + 3 = 1$ sont impossibles, il reste :

$x + 2$	3	7
$y + 3$	7	3
x	1	5
y	4	0

Les solutions sont $(x, y) \in \{(1, 4), (5, 0)\}$.

- 3) On factorise : $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 28$. Comme $x + y \geq 0$ et que le produit est positif, on a $x + y > 0$ puis $x - y > 0$, et $x + y \geq x - y$. De plus, $x + y$ et $x - y$ ont la même parité (leur différence $2y$ est paire); leur produit étant pair, ils sont tous les deux pairs. Les décompositions de 28 en produit de deux entiers $a \geq b$ sont $28 = 28 \times 1 = 14 \times 2 = 7 \times 4$. Seule 14×2 a deux facteurs pairs. Donc

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

Vérification : $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$. La seule solution est $(x, y) = (8, 6)$.

- 4) On cherche à faire apparaître un produit :

$$xy + x + 2y = 19 \iff xy + x + 2y + 2 = 21 \iff (x + 2)(y + 1) = 21.$$

Ici $x + 2 \geq 2$ et $y + 1 \geq 1$ sont des diviseurs de 21, avec $x + 2 \neq 1$:

$x + 2$	3	7	21
$y + 1$	7	3	1
x	1	5	19
y	6	2	0

Les solutions sont $(x, y) \in \{(1, 6), (5, 2), (19, 0)\}$.

✓ Solution Exercice 5

On utilise la propriété suivante : si un entier $n \geq 2$ n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $p^2 \leq n$, alors n est premier.

- 1) On a $11^2 = 121 \leq 127 < 169 = 13^2$, donc $\sqrt{127} < 13$. Il suffit de tester les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 :

- 127 est impair, donc non divisible par 2 ;
- $1 + 2 + 7 = 10$ n'est pas divisible par 3, donc 127 non plus ;
- 127 ne se termine ni par 0 ni par 5 ;
- $127 = 7 \times 18 + 1$;
- $127 = 11 \times 11 + 6$.

Aucun de ces nombres premiers ne divise 127 : 127 est premier.



- 2) • $111 : 1 + 1 + 1 = 3$ est divisible par 3, donc $111 = 3 \times 37$. 111 **n'est pas premier** ;
- $251 : 15^2 = 225 \leq 251 < 256 = 16^2$, donc il suffit de tester 2, 3, 5, 7, 11, 13 :
- 251 est impair ;
 - $2 + 5 + 1 = 8$ n'est pas divisible par 3 ;
 - 251 ne se termine ni par 0 ni par 5 ;
 - $251 = 7 \times 35 + 6$;
 - $251 = 11 \times 22 + 9$;
 - $251 = 13 \times 19 + 4$.

Aucun ne divise 251 : 251 **est premier**.

- $1001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$. 1001 **n'est pas premier**.
- $51^2 = 51 \times 51$ est le produit de deux entiers supérieurs à 1 ($51^2 = 2601$). 51² **n'est pas premier** (on a même $51^2 = 3^2 \times 17^2$).

✓ Solution Exercice 6

1) On décompose chaque nombre par divisions successives par des nombres premiers.

$\begin{array}{r l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 1386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 16093 & 7 \\ 2299 & 11 \\ 209 & 11 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$
--	---	---

D'où

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7, \quad 1386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11, \quad 16093 = 7 \times 11^2 \times 19.$$

2) Le PGCD est le produit des facteurs premiers **communs** avec le plus petit exposant ; le PPCM est le produit de tous les facteurs premiers avec le plus grand exposant.

- $\text{PGCD}(504, 1386) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$ et $\text{PPCM}(504, 1386) = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11 = 5544$.
- $\text{PGCD}(1386, 16093) = 7 \times 11 = 77$ et $\text{PPCM}(1386, 16093) = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 19 = 289\,674$.
- $\text{PGCD}(504, 16093) = 7$ et $\text{PPCM}(504, 16093) = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 19 = 1\,158\,696$.

Vérification : $126 \times 5544 = 504 \times 1386 = 698\,544$; on peut aussi vérifier que $\text{PGCD} \times \text{PPCM}$ est égal au produit des deux nombres dans les deux autres cas.

3) On divise numérateur et dénominateur par leur PGCD :

$$\frac{504}{1386} = \frac{504 \div 126}{1386 \div 126} = \frac{4}{11}, \quad \frac{16093}{1386} = \frac{16093 \div 77}{1386 \div 77} = \frac{209}{18}, \quad \frac{504}{16093} = \frac{504 \div 7}{16093 \div 7} = \frac{72}{2299}.$$

Solution Exercice 7

1/ On a :

$$\begin{array}{r|l}
 240 & 2 \\
 120 & 2 \\
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 135 & 3 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

Alors :

$$a = 240 = 2^4 \times 3 \times 5 \quad \text{et} \quad b = 135 = 3^3 \times 5.$$

2/

$$\frac{a}{b} = \frac{2^4 \times 3 \times 5}{3^3 \times 5} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9}.$$

$$ab = 2^4 \times 3^4 \times 5^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{ab} = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

3/ PGCD(a, b) : produit des facteurs premiers communs avec le plus petit exposant :

$$\text{PGCD}(a, b) = 3 \times 5 = 15.$$

PPCM(a, b) : produit de tous les facteurs premiers avec le plus grand exposant :

$$\text{PPCM}(a, b) = 2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160.$$

$$\text{Vérification : } \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = 15 \times 2160 = 32400 = ab.$$

4/ On utilise le dénominateur commun PPCM(a, b) = 2160 :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{9}{2160} + \frac{16}{2160} = \frac{25}{2160} = \frac{5}{432}.$$

La fraction $\frac{5}{432}$ est irréductible car $432 = 2^4 \times 3^3$ n'a aucun facteur commun avec 5.

Solution Exercice 8

1/ On développe chaque terme :

$$\begin{aligned}
 (5n + 2)^2 &= 25n^2 + 20n + 4, \\
 n(21n + 16) &= 21n^2 + 16n.
 \end{aligned}$$

Donc

$$A = 25n^2 + 20n + 4 - 21n^2 - 16n - 3 = 4n^2 + 4n + 1.$$

2/ On reconnaît une identité remarquable :

$$A = (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 = (2n + 1)^2.$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, l'entier $2n + 1$ est un entier naturel, donc A est le carré d'un entier : c'est un carré parfait.

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1$ est impair. Le produit de deux entiers impairs étant impair, $A = (2n + 1)^2$ est impair.

Autre méthode : $A = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ avec $2n^2 + 2n \in \mathbb{N}$, donc A est de la forme $2k + 1$: A est impair.



✓ Solution Exercice 9

1/ Comme $a \wedge b = 12$, tout diviseur commun de a et b divise 12, et réciproquement tout diviseur de 12 divise a et b . Les diviseurs communs de a et b sont donc les diviseurs de 12 :

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

2/ a) On sait que $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$, donc

$$a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b} = \frac{864}{12} = 72.$$

b) Comme $a \wedge b = 12$, on écrit $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec $a' \wedge b' = 1$. Alors

$$ab = 144 a' b' = 864 \implies a' b' = 6.$$

Les couples d'entiers premiers entre eux de produit 6 sont $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$. D'où

$$(a, b) \in \{(12, 72), (24, 36), (36, 24), (72, 12)\}.$$

Vérification : $24 \wedge 36 = 12$ et $24 \times 36 = 864$.

✓ Solution Exercice 10

1/ On divise successivement :

1176	2	4950	2
588	2	2475	3
294	2	825	3
147	3	275	5
49	7	55	5
7	7	11	11
1		1	

Alors :

$$1176 = a = 2^3 \times 3 \times 7^2 \quad \text{et} \quad 4950 = 2 \times 2475 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11.$$

2/ Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, le nombre de diviseurs de n est $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Ainsi :

- a possède $(3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$ diviseurs ;
- b possède $(1 + 1)(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$ diviseurs.

3/ Le PGCD s'obtient avec les facteurs premiers communs aux plus petits exposants, le PPCM avec tous les facteurs premiers aux plus grands exposants :

$$a \wedge b = 2 \times 3 = 6,$$

$$a \vee b = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 970\,200.$$

Vérification : $(a \wedge b)(a \vee b) = 6 \times 970\,200 = 5\,821\,200 = 1176 \times 4950 = ab$.



- 4/ Un entier est un carré parfait si et seulement si tous les exposants de sa décomposition en facteurs premiers sont pairs. Dans $a = 2^3 \times 3 \times 7^2$, les exposants de 2 et 3 sont impairs. Le plus petit c est donc

$$c = 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{et } ac = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = 84^2 = 7056.$$

- 5/ Dans $b = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$, les exposants de 2 et 11 sont impairs. Le plus petit d est donc

$$d = 2 \times 11 = 22,$$

$$\text{et } bd = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11^2 = 330^2 = 108\,900.$$

✓ Solution Exercise 11

- 1/ a) On reconnaît l'identité $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ avec $x = n^2 + 1$ et $y = n$:

$$\begin{aligned} (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) &= (n^2 + 1)^2 - n^2 \\ &= n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 \\ &= n^4 + n^2 + 1. \end{aligned}$$

- b) D'après la question précédente, $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$. Pour $n \geq 2$:

- $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1 \geq 2 \times 1 + 1 = 3 > 1$;
- $n^2 + n + 1 \geq 7 > 1$.

Le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est donc le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1 : il admet un diviseur autre que 1 et lui-même. Il n'est pas premier.

- 2/ On remarque que $10101 = 10^4 + 10^2 + 1$. C'est le cas $n = 10 \geq 2$ de la question 1)b), donc 10101 n'est pas premier. Explicitement :

$$10101 = (10^2 - 10 + 1)(10^2 + 10 + 1) = 91 \times 111.$$

✓ Solution Exercise 12

- 1/ $A = 5^{n+2} - 5^n = 5^n(5^2 - 1) = 24 \times 5^n$, donc

$$A = 2^3 \times 3 \times 5^n.$$

- 2/ $B = 3^{n+3} + 3^n = 3^n(3^3 + 1) = 28 \times 3^n$, donc

$$B = 2^2 \times 7 \times 3^n.$$

- 3/ On distingue deux cas, car l'exposant de 3 dans B est n .

- Si $n = 0$: $A = 24 = 2^3 \times 3$ et $B = 28 = 2^2 \times 7$, donc $A \wedge B = 2^2 = 4$ et $A \vee B = 2^3 \times 3 \times 7 = 168$.
- Si $n \geq 1$: $A = 2^3 \times 3 \times 5^n$ et $B = 2^2 \times 7 \times 3^n$. On prend les facteurs communs aux plus petits exposants (le facteur 5 n'apparaît pas dans B et 7 n'apparaît pas dans A) :

$$A \wedge B = 2^2 \times 3 = 12,$$

et tous les facteurs aux plus grands exposants :

$$A \vee B = 2^3 \times 3^n \times 5^n \times 7 = 56 \times 15^n.$$

$$\text{Vérification : } 12 \times 56 \times 15^n = 672 \times 15^n = 24 \times 28 \times 15^n = AB.$$



4/ On a $\frac{A}{B} = \frac{24 \times 5^n}{28 \times 3^n} = \frac{6 \times 5^n}{7 \times 3^n}$.

- Si $n = 0$: $\frac{A}{B} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$ (fraction irréductible).
- Si $n \geq 1$: on divise numérateur et dénominateur par $A \wedge B = 12$:

$$\frac{A}{B} = \frac{A/12}{B/12} = \frac{2 \times 5^n}{7 \times 3^{n-1}},$$

et cette fraction est irréductible car ses deux termes sont premiers entre eux.

✓ Solution Exercice 13

- 1) Si $m = 3n + 1$, alors

$$m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1) = 3n(3n + 2),$$

qui est un multiple de 3.

- 2) Si $m = 3n + 2$, alors

$$m^2 + 2 = 9n^2 + 12n + 4 + 2 = 9n^2 + 12n + 6 = 3(3n^2 + 4n + 2),$$

qui est un multiple de 3.

- 3) Trois entiers consécutifs s'écrivent $k, k + 1, k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Leur somme vaut

$$k + (k + 1) + (k + 2) = 3k + 3 = 3(k + 1),$$

qui est un multiple de 3.

- 4) Par hypothèse, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $3n + 2m = 5p$ et $7n + 5m = 5q$. Pour éliminer m :

$$5(3n + 2m) - 2(7n + 5m) = 15n + 10m - 14n - 10m = n.$$

Donc $n = 5 \times 5p - 2 \times 5q = 5(5p - 2q)$: n est un multiple de 5.



Andrew Wiles (qui a mis 7 ans à résoudre le dernier théorème de Fermat) :
« On entre dans la première pièce d'un château et il fait complètement noir. On trébuche sur les meubles. Peu à peu, on apprend où est chaque meuble. Enfin, après environ six mois, on trouve l'interrupteur, on allume la lumière, et soudain tout devient clair. »