



Série 2

Racines carrées



3 APIC

S. EL JAAFARI



Énoncés des exercices



Exercice 1

1/ Parmi les écritures suivantes, entourer celles qui sont correctes :

$$\begin{array}{ccccc} * \sqrt{11} & * \sqrt{-11} & * \sqrt{11^2} & * \sqrt{(-11)^2} & * \sqrt{-11^2} \\ * \sqrt{-11^2} & * -\sqrt{11} & * \sqrt{11^2} & & \end{array}$$

2/ Sans utiliser la calculatrice, Calculer :

$$\begin{array}{ccccc} * \sqrt{1} & * \sqrt{4} & * \sqrt{9} & * \sqrt{16} & * \sqrt{25} \\ * \sqrt{36} & * \sqrt{49} & * \sqrt{64} & * \sqrt{81} & * \sqrt{100} \\ * \sqrt{121} & * \sqrt{144} & * \sqrt{169} & * \sqrt{196} & * \sqrt{225}. \end{array}$$

3/ Sans utiliser la calculatrice, donner le résultat de :

$$A = \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}}$$



Exercice 2

1/ Écrire sous forme $a\sqrt{2}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{ccccc} * \sqrt{8} & * \sqrt{18} & * \sqrt{32} & * \sqrt{50} & * \sqrt{72} \\ * \sqrt{98} & * \sqrt{128} & * \sqrt{162} & * \sqrt{200} & \end{array}$$

2/ Écrire sous forme $a\sqrt{3}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{ccccc} * \sqrt{12} & * \sqrt{27} & * \sqrt{48} & * \sqrt{75} & * \sqrt{108} \\ * \sqrt{147} & * \sqrt{192} & * \sqrt{243} & * \sqrt{300} & \end{array}$$

3/ Écrire sous forme $a\sqrt{5}$ les nombres suivants :



$$\begin{array}{lllll}
 * \sqrt{20} & * \sqrt{45} & * \sqrt{80} & * \sqrt{125} & * \sqrt{180} \\
 * \sqrt{245} & * \sqrt{320} & * \sqrt{405} & * \sqrt{500} &
 \end{array}$$

4/ Écrire sous forme $a\sqrt{13}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{ll}
 * A = \sqrt{637} + \sqrt{468} - \sqrt{1573} & * B = \sqrt{2925} - 11\sqrt{13} \\
 * C = 3\sqrt{2886} - 3\sqrt{1872} + 5\sqrt{13}. &
 \end{array}$$

Exercice 3

1/ Écrire sous forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{lllll}
 * \sqrt{28} & * \sqrt{63} & * \sqrt{176} & * \sqrt{252} & * \sqrt{275} \\
 * \sqrt{539} & * \sqrt{567} & * \sqrt{640} & * \sqrt{891} &
 \end{array}$$

2/ Écrire sous forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{ll}
 * A = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{45} - 3\sqrt{245} & * B = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + \sqrt{12} \\
 * C = \sqrt{180} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{125} & * D = \sqrt{1053} - 3\sqrt{325} + 2\sqrt{52}.
 \end{array}$$

3/ Écrire sous forme $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 * I = \frac{1}{\sqrt{2}} & * J = \frac{3}{\sqrt{5}} & * K = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\
 * L = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{11}} & * M = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{11}} & * N = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}.
 \end{array}$$

Exercice 4

1/ Calculer sans utiliser la calculatrice, les nombres suivants :

$$\begin{array}{ll}
 * A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} & * B = \sqrt{18} \times \sqrt{50} \\
 * C = \sqrt{24} \times \sqrt{27} \times \sqrt{8} & * D = \sqrt{50} \times \sqrt{14} \times \sqrt{21} \times \sqrt{3}.
 \end{array}$$

2/ Calculer sans utiliser la calculatrice, les nombres suivants :

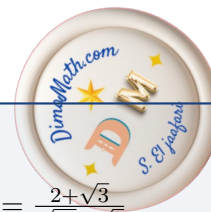
$$* E = \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}} \quad * F = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}} \quad * G = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{199}} \quad * H = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{245}} \quad * K = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{196}}.$$

3/ Écrire sous forme de $a + b\sqrt{c}$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 * L = \sqrt{2}(\sqrt{8} + 4\sqrt{3}) & * M = \sqrt{7}(3\sqrt{7} - 5) & * N = (\sqrt{5} - 3)(2 + \sqrt{5}) \\
 * P = (2\sqrt{6} + 1)(8 - 5\sqrt{6}) & * Q = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 & * R = (3\sqrt{7} + 5)^2 \\
 * S = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})^2. & &
 \end{array}$$



Exercice 5



1/ Calculer les fractions suivants sans racine carrées au dénominateur :

$$* A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \quad * B = \frac{5}{4-\sqrt{6}} \quad * C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \quad * D = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$$

$$* E = \frac{7}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} \quad * F = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad * G = \frac{\sqrt{13}+2}{\sqrt{13}-1}$$

2/ Calculer sans utiliser la calculatrice, les nombres suivants :

$$* H = \sqrt{3^2} \quad * I = \sqrt{3^6} \quad * J = \sqrt{3^5} \quad * L = \sqrt{10^7}$$

$$* M = \sqrt{2^9} \quad * N = \sqrt{a^{2n}} \quad * P = \sqrt{a^{2n+1}}$$

3/ Calculer les nombres suivants :

$$* Q = (5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7}) \quad * R = (11 + \sqrt{5})(11 - \sqrt{5})$$

$$* S = (\sqrt{11} - \sqrt{19})(\sqrt{11} + \sqrt{19}) \quad * U = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$* V = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) \quad * X = (3\sqrt{7} + 5)(3\sqrt{7} - 5)$$

$$* Y = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$$



Exercice 6

On considère les nombres suivants : $m = 7 + 4\sqrt{3}$ et $n = 7 - 4\sqrt{3}$.

1/ Montrer que $m = \frac{1}{n}$.

2/ Calculer m^2 et n^2 .

3/ Dédurre de la question précédente que $\sqrt{97 + 56\sqrt{3}} - \sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$.

4/ Vérifier que $u = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ est un entier naturel.

5/ Justifier que $v = \frac{\sqrt{48} - 7}{2\sqrt{97 - 56\sqrt{3}}}$ est une fraction d'entiers.



Exercice 7

1/ Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } x^2 = 3^2 \quad \text{b) } x^2 = 36 \quad \text{c) } x^2 = 81 \quad \text{d) } x^2 = 16$$

$$\text{e) } x^2 = -1 \quad \text{f) } x^2 = 0 \quad \text{g) } x^2 = 1,44 \quad \text{h) } x^2 = 1,96$$

$$\text{i) } x^2 = -10 \quad \text{j) } x^2 = 225$$

2/ Résoudre les équations suivantes :

$$\text{a) } (x - 1)^2 = 4^2 \quad \text{b) } (x + 3)^2 = 36 \quad \text{c) } (x - 1,5)^2 = 81$$

d) $(2 + x)^2 = 16$

e) $(2x + 3)^2 = -1$

f) $(5x - 40)^2 = 0$

g) $(x - 08)^2 = 1,44$

h) $(x - 0.4)^2 = 1,96$

i) $(x + 10)^2 = -10$



Dimamath.com

Corrigés des exercices



✓ Solution Exercice 1

1/ Pour qu'une écriture avec une racine carrée soit correcte, le nombre situé sous le radical $\sqrt{\dots}$ doit toujours être positif ou nul.

Les écritures correctes sont :

- $\sqrt{11}$ (car $11 \geq 0$)
- $\sqrt{11^2}$ (car $11^2 = 121 \geq 0$)
- $\sqrt{(-11)^2}$ (car $(-11)^2 = 121 \geq 0$)
- $-\sqrt{11}$ (le signe moins est à l'extérieur de la racine)
- $\sqrt{11}^2$ (car $\sqrt{11}$ existe et son carré vaut 11)

Remarque : $\sqrt{-11}$, $\sqrt{-11^2}$ et $\sqrt{-11^2}$ ne sont pas correctes car elles contiennent un nombre négatif directement sous la racine.

2/ Voici les carrés parfaits fondamentaux :

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| • $\sqrt{1} = 1$ | • $\sqrt{4} = 2$ | • $\sqrt{9} = 3$ |
| • $\sqrt{16} = 4$ | • $\sqrt{25} = 5$ | • $\sqrt{36} = 6$ |
| • $\sqrt{49} = 7$ | • $\sqrt{64} = 8$ | • $\sqrt{81} = 9$ |
| • $\sqrt{100} = 10$ | • $\sqrt{121} = 11$ | • $\sqrt{144} = 12$ |
| • $\sqrt{169} = 13$ | • $\sqrt{196} = 14$ | • $\sqrt{225} = 15$ |

3/ On résout cette expression de l'intérieur vers l'extérieur, étape par étape :

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}} \\
 A &= \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + 2}}}}} \\
 A &= \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + 3}}}}} \\
 A &= \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + 4}}}} \\
 A &= \sqrt{57 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + 5}}} \\
 A &= \sqrt{57 + \sqrt{43 + 6}} \\
 A &= \sqrt{57 + 7} \\
 A &= \sqrt{64} \\
 A &= 8
 \end{aligned}$$

 Solution Exercice 2


1/ Écrire sous forme $a\sqrt{2}$ les nombres suivants :

- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
- $\sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
- $\sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = \sqrt{81} \times \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$
- $\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

2/ Écrire sous forme $a\sqrt{3}$ les nombres suivants :

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
- $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
- $\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
- $\sqrt{192} = \sqrt{64 \times 3} = \sqrt{64} \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
- $\sqrt{243} = \sqrt{81 \times 3} = \sqrt{81} \times \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$
- $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{100} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

3/ Écrire sous forme $a\sqrt{5}$ les nombres suivants :

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
- $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
- $\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = \sqrt{36} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- $\sqrt{245} = \sqrt{49 \times 5} = \sqrt{49} \times \sqrt{5} = 7\sqrt{5}$
- $\sqrt{320} = \sqrt{64 \times 5} = \sqrt{64} \times \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$
- $\sqrt{405} = \sqrt{81 \times 5} = \sqrt{81} \times \sqrt{5} = 9\sqrt{5}$
- $\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{100} \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

4/ Écrire sous forme $a\sqrt{13}$ les nombres suivants :

• Calcul de A :

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{637} + \sqrt{468} - \sqrt{1573} \\
 &= \sqrt{49 \times 13} + \sqrt{36 \times 13} - \sqrt{121 \times 13} \\
 &= 7\sqrt{13} + 6\sqrt{13} - 11\sqrt{13} \\
 &= (7 + 6 - 11)\sqrt{13} \\
 &= 2\sqrt{13}
 \end{aligned}$$



- Calcul de B :

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{2925} - 11\sqrt{13} \\
 &= \sqrt{225 \times 13} - 11\sqrt{13} \\
 &= 15\sqrt{13} - 11\sqrt{13} \\
 &= (15 - 11)\sqrt{13} \\
 &= 4\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

- Calcul de C :

$$\begin{aligned}
 C &= 3\sqrt{2197} - 3\sqrt{1872} + 5\sqrt{13} \\
 &= 3\sqrt{169 \times 13} - 3\sqrt{144 \times 13} + 5\sqrt{13} \\
 &= 3 \times 13\sqrt{13} - 3 \times 12\sqrt{13} + 5\sqrt{13} \\
 &= 39\sqrt{13} - 36\sqrt{13} + 5\sqrt{13} \\
 &= (39 - 36 + 5)\sqrt{13} \\
 &= 8\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

✓ Solution Exercice 3

1/ Écrire sous forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

- $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$
- $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}$
- $\sqrt{176} = \sqrt{16 \times 11} = 4\sqrt{11}$
- $\sqrt{252} = \sqrt{36 \times 7} = 6\sqrt{7}$
- $\sqrt{275} = \sqrt{25 \times 11} = 5\sqrt{11}$
- $\sqrt{539} = \sqrt{49 \times 11} = 7\sqrt{11}$
- $\sqrt{567} = \sqrt{81 \times 7} = 9\sqrt{7}$
- $\sqrt{640} = \sqrt{64 \times 10} = 8\sqrt{10}$
- $\sqrt{891} = \sqrt{81 \times 11} = 9\sqrt{11}$

2/ Écrire sous forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

- Calcul de A :

$$\begin{aligned}
 A &= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{45} - 3\sqrt{245} \\
 &= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{49 \times 5} \\
 &= 3\sqrt{5} + 4 \times 3\sqrt{5} - 3 \times 7\sqrt{5} \\
 &= 3\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 21\sqrt{5} \\
 &= (3 + 12 - 21)\sqrt{5} = -6\sqrt{5}
 \end{aligned}$$



- Calcul de B :

$$\begin{aligned}
 B &= 5\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + \sqrt{12} \\
 &= 5\sqrt{9 \times 3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{4 \times 3} \\
 &= 5 \times 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\
 &= 15\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\
 &= (15 - 3 + 2)\sqrt{3} = 14\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

- Calcul de C :

$$\begin{aligned}
 C &= \sqrt{180} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{125} \\
 &= \sqrt{36 \times 5} + 3\sqrt{16 \times 5} - 2\sqrt{25 \times 5} \\
 &= 6\sqrt{5} + 3 \times 4\sqrt{5} - 2 \times 5\sqrt{5} \\
 &= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 10\sqrt{5} \\
 &= (6 + 12 - 10)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

- Calcul de D :

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{1053} - 3\sqrt{325} + 2\sqrt{52} \\
 &= \sqrt{81 \times 13} - 3\sqrt{25 \times 13} + 2\sqrt{4 \times 13} \\
 &= 9\sqrt{13} - 3 \times 5\sqrt{13} + 2 \times 2\sqrt{13} \\
 &= 9\sqrt{13} - 15\sqrt{13} + 4\sqrt{13} \\
 &= (9 - 15 + 4)\sqrt{13} = -2\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

3/ Écrire sous forme $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ les nombres suivants :

$$\begin{aligned}
 \bullet I &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \bullet J &= \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\
 \bullet K &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \\
 \bullet L &= \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{7} \times \sqrt{11}}{2\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{77}}{2 \times 11} = \frac{3\sqrt{77}}{22} \\
 \bullet M &= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{55}}{11} \\
 \bullet N &= \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{2} \times \sqrt{11}}{3\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{22}}{3 \times 11} = \frac{7\sqrt{22}}{33}
 \end{aligned}$$

✓ Solution Exercice 4

1/ Calculer sans utiliser la calculatrice, les nombres suivants :

- Calcul de A :

$$A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$$



- Calcul de B :

$$B = \sqrt{18} \times \sqrt{50} = \sqrt{9 \times 2} \times \sqrt{25 \times 2} = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$$

- Calcul de C :

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{24} \times \sqrt{27} \times \sqrt{8} \\ &= \sqrt{4 \times 6} \times \sqrt{9 \times 3} \times \sqrt{4 \times 2} \\ &= 2\sqrt{6} \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \\ &= (2 \times 3 \times 2) \times \sqrt{6 \times 3 \times 2} \\ &= 12 \times \sqrt{36} = 12 \times 6 = 72 \end{aligned}$$

- Calcul de D :

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{50} \times \sqrt{14} \times \sqrt{21} \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{25 \times 2} \times \sqrt{2 \times 7} \times \sqrt{3 \times 7} \times \sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} \\ &= 5 \times (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{7} \times \sqrt{7}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) \\ &= 5 \times 2 \times 7 \times 3 = 210 \end{aligned}$$

2/ Calculer sans utiliser la calculatrice, les nombres suivants :

$$\begin{aligned} \bullet E &= \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{108}{12}} = \sqrt{9} = 3 \\ \bullet F &= \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{63}{28}} = \sqrt{\frac{9 \times 7}{4 \times 7}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\ \bullet G &= \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{117}{13}} = \sqrt{9} = 3 \\ \bullet H &= \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{245}} = \sqrt{\frac{180}{245}} = \sqrt{\frac{36 \times 5}{49 \times 5}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7} \\ \bullet K &= \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{196}} = \frac{11}{14} \end{aligned}$$

3/ Écrire sous forme de $a + b\sqrt{c}$ les nombres suivants :

- Calcul de L :

$$L = \sqrt{2}(\sqrt{8} + 4\sqrt{3}) = \sqrt{2} \times \sqrt{8} + 4\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{16} + 4\sqrt{6} = 4 + 4\sqrt{6}$$

- Calcul de M :

$$M = \sqrt{7}(3\sqrt{7} - 5) = 3 \times (\sqrt{7})^2 - 5\sqrt{7} = 3 \times 7 - 5\sqrt{7} = 21 - 5\sqrt{7}$$

- Calcul de N :

$$\begin{aligned} N &= (\sqrt{5} - 3)(2 + \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - 6 - 3\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} + 5 - 6 - 3\sqrt{5} \\ &= -1 - \sqrt{5} \end{aligned}$$



- Calcul de P :

$$\begin{aligned} P &= (2\sqrt{6} + 1)(8 - 5\sqrt{6}) \\ &= 16\sqrt{6} - 10(\sqrt{6})^2 + 8 - 5\sqrt{6} \\ &= 16\sqrt{6} - 60 + 8 - 5\sqrt{6} \\ &= -52 + 11\sqrt{6} \end{aligned}$$

- Calcul de Q :

$$Q = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 = 8 - 2\sqrt{15}$$

- Calcul de R :

$$R = (3\sqrt{7} + 5)^2 = (3\sqrt{7})^2 + 2 \times 3\sqrt{7} \times 5 + 5^2 = 63 + 30\sqrt{7} + 25 = 88 + 30\sqrt{7}$$

- Calcul de S :

$$S = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{7} + (2\sqrt{7})^2 = 45 - 12\sqrt{35} + 28 = 73 - 12\sqrt{35}$$

✓ Solution Exercice 5

1/ Calculer les fractions suivantes sans racine carrée au dénominateur :

- Calcul de A :

$$A = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1 \times (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

- Calcul de B :

$$B = \frac{5}{4 - \sqrt{6}} = \frac{5 \times (4 + \sqrt{6})}{(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})} = \frac{20 + 5\sqrt{6}}{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{20 + 5\sqrt{6}}{16 - 6} = \frac{20 + 5\sqrt{6}}{10} = \frac{4 + \sqrt{6}}{2}$$

- Calcul de C :

$$C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{35} - 5}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{35} - 5}{7 - 5} = \frac{\sqrt{35} - 5}{2}$$

- Calcul de D :

$$\begin{aligned} D &= \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{11} + \sqrt{7})}{(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{2\sqrt{11} + 2\sqrt{7} + \sqrt{33} + \sqrt{21}}{11 - 7} = \frac{2\sqrt{11} + 2\sqrt{7} + \sqrt{33} + \sqrt{21}}{4} \end{aligned}$$

- Calcul de E :

$$E = \frac{7}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} = \frac{7(\sqrt{11} + \sqrt{7})}{(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})} = \frac{7(\sqrt{11} + \sqrt{7})}{11 - 7} = \frac{7(\sqrt{11} + \sqrt{7})}{4}$$

- Calcul de F :

$$F = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{5 - 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$$



- Calcul de G :

$$G = \frac{\sqrt{13} + 2}{\sqrt{13} - 1} = \frac{(\sqrt{13} + 2)(\sqrt{13} + 1)}{(\sqrt{13} - 1)(\sqrt{13} + 1)} = \frac{13 + \sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 2}{13 - 1}$$

$$= \frac{15 + 3\sqrt{13}}{12} = \frac{5 + \sqrt{13}}{4}$$

2/ Calculer sans utiliser la calculatrice, les nombres suivants ($a > 0$) :

- $H = \sqrt{3^2} = 3$
- $I = \sqrt{3^6} = \sqrt{(3^3)^2} = 3^3 = 27$
- $J = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \times 3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$
- $L = \sqrt{10^7} = \sqrt{10^6 \times 10} = 10^3\sqrt{10} = 1000\sqrt{10}$
- $M = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8 \times 2} = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$
- $N = \sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = a^n$
- $P = \sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{a^{2n} \times a} = a^n\sqrt{a}$

3/ Calculer les nombres suivants (Identités remarquables) :

- * $Q = (5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7}) = 5^2 - (\sqrt{7})^2 = 25 - 7 = 18$
- * $R = (11 + \sqrt{5})(11 - \sqrt{5}) = 11^2 - (\sqrt{5})^2 = 121 - 5 = 116$
- * $S = (\sqrt{11} - \sqrt{19})(\sqrt{11} + \sqrt{19}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{19})^2 = 11 - 19 = -8$
- * $U = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 18 - 12 = 6$
- * $V = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) = (3\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 45 - 12 = 33$
- * $X = (3\sqrt{7} + 5)(3\sqrt{7} - 5) = (3\sqrt{7})^2 - 5^2 = 63 - 25 = 38$
- * $Y = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}) = (3\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 45 - 28 = 17$

✓ Solution Exercice 6

1/ Montrer que $m = \frac{1}{n}$:

Montrer que $m = \frac{1}{n}$ revient à montrer que $m \times n = 1$.

$$m \times n = (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})$$

$$= 7^2 - (4\sqrt{3})^2$$

$$= 49 - (16 \times 3)$$

$$= 49 - 48 = 1$$

Puisque $m \times n = 1$, on a bien $m = \frac{1}{n}$.

2/ Calculer m^2 et n^2 :



- Calcul de m^2 :

$$\begin{aligned} m^2 &= (7 + 4\sqrt{3})^2 \\ &= 7^2 + 2 \times 7 \times 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3})^2 \\ &= 49 + 56\sqrt{3} + 48 \\ &= 97 + 56\sqrt{3} \end{aligned}$$

- Calcul de n^2 :

$$\begin{aligned} n^2 &= (7 - 4\sqrt{3})^2 \\ &= 7^2 - 2 \times 7 \times 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3})^2 \\ &= 49 - 56\sqrt{3} + 48 \\ &= 97 - 56\sqrt{3} \end{aligned}$$

3/ Déduire de la question précédente que $\sqrt{97 + 56\sqrt{3}} - \sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$:

D'après la question 2, on sait que $97 + 56\sqrt{3} = m^2$ et $97 - 56\sqrt{3} = n^2$. De plus, $m > 0$ et $n > 0$ car $7 > 4\sqrt{3}$ (puisque $49 > 48$).

$$\begin{aligned} \sqrt{97 + 56\sqrt{3}} - \sqrt{97 - 56\sqrt{3}} &= \sqrt{m^2} - \sqrt{n^2} \\ &= m - n \\ &= (7 + 4\sqrt{3}) - (7 - 4\sqrt{3}) \\ &= 7 + 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

4/ Vérifier que $u = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ est un entier naturel :

En utilisant le fait que $m \times n = 1$ (donc $\frac{1}{n} = m$ et $\frac{1}{m} = n$) :

$$\begin{aligned} u &= \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = m \left(\frac{1}{n} \right) + n \left(\frac{1}{m} \right) \\ &= m \times m + n \times n \\ &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs trouvées à la question 2 :

$$\begin{aligned} u &= (97 + 56\sqrt{3}) + (97 - 56\sqrt{3}) \\ &= 97 + 97 \\ &= 194 \end{aligned}$$

Comme $194 \in \mathbb{N}$, u est bien un entier naturel.

5/ Justifier que $v = \frac{\sqrt{48} - 7}{2\sqrt{97 - 56\sqrt{3}}}$ est une fraction d'entiers :

Commençons par simplifier le numérateur et le dénominateur :

- **Numérateur** : $\sqrt{48} - 7 = \sqrt{16 \times 3} - 7 = 4\sqrt{3} - 7 = -(7 - 4\sqrt{3}) = -n$.
- **Dénominateur** : $2\sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 2\sqrt{n^2} = 2n$ (car $n > 0$).



On remplace ces expressions dans v :

$$v = \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}$$

Le nombre $v = -\frac{1}{2}$ est le quotient de l'entier -1 par l'entier 2 . C'est donc bien une fraction d'entiers.

✓ Solution Exercice 7

Rappel de cours : Pour résoudre une équation du type $X^2 = a$:

- Si $a > 0$, l'équation possède deux solutions : $X = \sqrt{a}$ ou $X = -\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, l'équation possède une unique solution : $X = 0$.
- Si $a < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.

1/ Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = 3^2$ équivaut $x^2 = 9$
Comme $9 > 0$, l'équation a deux solutions : $x = \sqrt{9} = 3$ et $x = -\sqrt{9} = -3$.
- $x^2 = 36$
Comme $36 > 0$, $x = \sqrt{36} = 6$ ou $x = -\sqrt{36} = -6$.
Donc cette équation possède deux solutions -6 et 6 .
- $x^2 = 81$
Comme $81 > 0$, $x = \sqrt{81} = 9$ ou $x = -\sqrt{81} = -9$.
Donc cette équation possède deux solutions -9 et 9 .
- $x^2 = 16$
Comme $16 > 0$, $x = \sqrt{16} = 4$ ou $x = -\sqrt{16} = -4$.
Donc cette équation possède deux solutions -4 et 4 .
- $x^2 = -1$
Comme $-1 < 0$, un carré ne peut pas être négatif dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'a pas de solution réelle.
- $x^2 = 0$
L'unique solution est $x = 0$.
- $x^2 = 1,44$
Comme $1,44 > 0$, $x = \sqrt{1,44} = 1,2$ ou $x = -\sqrt{1,44} = -1,2$.
Donc cette équation possède deux solutions $-1,2$ et $1,2$.
- $x^2 = 1,96$
Comme $1,96 > 0$, $x = \sqrt{1,96} = 1,4$ ou $x = -\sqrt{1,96} = -1,4$.
Donc cette équation possède deux solutions $-1,4$ et $1,4$.
- $x^2 = -10$
Comme $-10 < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.
- $x^2 = 225$
Comme $225 > 0$, $x = \sqrt{225} = 15$ ou $x = -\sqrt{225} = -15$.
Donc cette équation possède deux solutions -15 et 15 .

2/ Résoudre les équations suivantes :



- a) $(x - 1)^2 = 4^2$ équivaut $(x - 1)^2 = 16$
Comme $16 > 0$ alors $x - 1 = 4$ ou $x - 1 = -4$
Donc $x = 5$ ou $x = -3$
Donc les solutions de cette équation sont -3 et 5 .
- b) $(x + 3)^2 = 36$
Comme $36 > 0$, alors $x + 3 = 6$ ou $x + 3 = -6$
Donc $x = 3$ ou $x = -9$
Donc les solutions de cette équation sont -9 et 3 .
- c) $(x - 1,5)^2 = 81$
Comme $81 > 0$, alors $x - 1,5 = 9$ ou $x - 1,5 = -9$
Donc $x = 10,5$ ou $x = -7,5$
Donc les solutions de cette équation sont $-7,5$ et $10,5$.
- d) $(2 + x)^2 = 16$
Comme $16 > 0$, alors $2 + x = 4$ ou $2 + x = -4$
Donc $x = 2$ ou $x = -6$
Donc les solutions de cette équation sont -6 et 2 .
- e) $(2x + 3)^2 = -1$
Comme $-1 < 0$, cette équation n'admet aucune solution réelle.
- f) $(5x - 40)^2 = 0$
 $5x - 40 = 0$ équivaut $5x = 40$ équivaut $x = 8$
Donc cette équation possède l'unique solution 8 .
- g) $(x - 0,8)^2 = 1,44$
Comme $1,44 > 0$, alors $x - 0,8 = 1,2$ ou $x - 0,8 = -1,2$
Donc $x = 2$ ou $x = -0,4$
Donc les solutions de cette équation sont $-0,4$ et 2 .
- h) $(x - 0,4)^2 = 1,96$
Comme $1,96 > 0$, alors $x - 0,4 = 1,4$ ou $x - 0,4 = -1,4$
Donc $x = 1,8$ ou $x = -1$
Donc les solutions de cette équation sont -1 et $1,8$.
- i) $(x + 10)^2 = -10$
Comme $-10 < 0$, cette équation n'admet aucune solution réelle.
 $S = \emptyset$

Prenez le temps qu'il faut pour répondre à chaque question avant de voir les solutions proposées