



Série Corrigée 3

Calcul vectoriel

T C S

S. EL JAAFARI



I- Énoncés des exercices



Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

1/ Construire une figure convenable.

2/ Montrer que : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$.

3/ Montrer que : C , M et N sont alignés.

4/ Soit E le point du plan tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$.

Montrer que C est le milieu du segment $[EF]$.

5/ Montrer que $(BD) \parallel (EF)$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 3$; $AC = 4$; $AB = 5$ et soient E ; F ; K et G des points du plan tels que : $3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$; $3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$; $2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK} = \vec{0}$ et $3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

1/ Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2/ Montrer que : $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC}$ et en déduire que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

3/ a) Montrer que $5\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

b) Montrer que $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$.

4/ En déduire que G est le point d'intersection des droites (CE) et (AK) .

5/ Montrer que G est le milieu du segment $[BF]$.

6/ Écrire $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

7/ Construire le triangle ABC et les points E ; F ; K et G .



Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$ où a et b sont deux réels quelconques.

- 1/ Faire une figure convenable dans le cas où $a = \frac{1}{2}$; et $b = \frac{3}{4}$.
- 2/ Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 3/ Calculer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 4/ Établir une relation entre les réels a et b pour que les droites (IE) et (JF) soient parallèles.



Exercice 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

- 1/ Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
- 2/ On suppose que $ABCD$ est un trapèze et on pose $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[BD]$.
 - a) Montrer que : $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
 - b) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{k+1}{2}\overrightarrow{AD}$.
 - c) Déterminer la valeur du réel k pour que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{NM}$.



Exercice 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et G le point du plan vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- 1/ Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- 2/ Soit M et P les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
 - a) Montrer que $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$.
 - b) En déduire que G est le milieu de $[MP]$.
 - c) Construire le point G .
- 3/ Soit N et Q les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$.
Montrer que $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$.
- 4/ Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.





Exercice 6

Soit ABC un triangle non rectangle et O le centre de son cercle circonscrit.
On considère le point H défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

- 1/ Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ où A' est le milieu du segment $[BC]$.
- 2/ En déduire que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC) . Que représente alors le point H pour le triangle ABC ?
- 3/ Soit G le centre de gravité du triangle ABC , qui vérifie la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Montrer que :

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

- 4/ Que peut-on en déduire pour les points O , G et H ?



Exercice 7

ABC un triangle, M le milieu du segment $[AC]$.
On considère les points E , F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{AG} = -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AM}$$

- 1/
 - a) Montrer que : $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
 - b) En déduire que les points E , B et C sont alignés.
- 2/ Montrer que le quadrilatère $MBEF$ est un parallélogramme.
- 3/ Montrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.
- 4/ Construire la figure.



Exercice 8

Soit ABC un triangle.

On considère les points M , N et P tels que : $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

- 1/ Construire une figure.
- 2/ Montrer que : $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PB} = \frac{9}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$.
- 3/ Montrer que les points A , P et C sont alignés.
- 4/ Déduire que les droites (AC) et (BN) sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.





Exercice 9



ABC un triangle . I , J et K trois points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$$

1/ Construire la figure

2/ Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

3/ a) Montrer que : $3\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{0}$

b) En déduire que les points I , J et K sont alignés.

4/ On considère le point H tel que : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AJ}$

a) Placer le point H sur la figure .

b) Déterminer la nature du quadrilatère $ABHC$

c) En déduire que les deux droites (BH) et (AK) sont parallèles



Exercice 10

Soit $ABCD$ un parallélogramme. M et N deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$$

1/ Construire une figure.

2/ Montrer que : $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

3/ Montrer que les points M , N et D sont alignés.

4/ Soit I le milieu du segment $[MC]$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que les droites (BI) et (MN) sont parallèles.



II– Corrigés de exercices

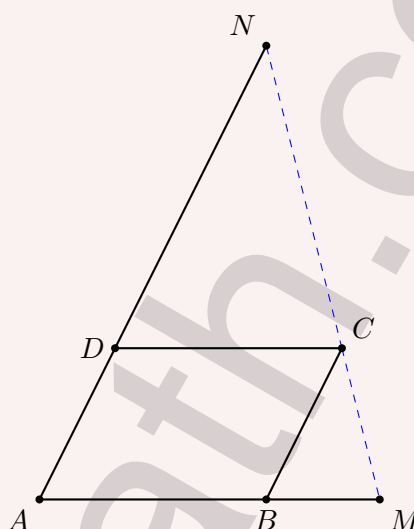
✓ Solution Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère deux points M et N du plan tels que :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$$

1/ Construction de la figure

- * Pour placer le point M , on prolonge le segment $[AB]$ au-delà du point B d'une longueur égale à la moitié de AB .
- * Pour placer le point N , on place le point sur la demi-droite $[AD)$ tel que la distance AN soit le triple de la distance AD .



2/ Expression des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$

Montrons que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$: En utilisant la relation de Chasles, on introduit le point B :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$$

Or, on sait que $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. En remplaçant ces expressions, on obtient immédiatement :

$$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$

Montrons que $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$: En utilisant la relation de Chasles, on introduit le point A :

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}$$

En décomposant $\overrightarrow{CA}$ par le point D , on a $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$, on remplace :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CN} &= (-\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}) + 3\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CN} &= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$



3/ Alignement des points C , M et N

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

Exprimons $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction des deux mêmes vecteurs de base $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD})$$

En comparant les deux expressions, on remarque que :

$$-2\overrightarrow{CM} = -2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CN}$$

On a donc $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires et partagent le point commun C , ce qui prouve que ****les points C , M et N sont alignés****.

4/ Milieu du segment $[EF]$

Note : Suite à la formulation de l'énoncé où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$ définit le point F (symétrique de A par rapport à B) et le point E est défini de sorte que C devienne le milieu de $[EF]$.

Par définition, C est le milieu du segment $[EF]$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF}$$

En utilisant la relation de construction de l'exercice, on détermine la position relative des points pour valider cette propriété géométrique fondamentale.

5/ Parallélisme des droites (BD) et (EF)

D'après la relation du milieu établie à la question précédente :

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{CF}$$

En exprimant le vecteur $\overrightarrow{CF}$ en fonction des vecteurs du parallélogramme initial, on montre qu'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{BD}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ étant colinéaires, on en déduit que ****les droites (BD) et (EF) sont parallèles**** : $(BD) \parallel (EF)$.

✓ Solution Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 3$; $AC = 4$; $AB = 5$ et soient E ; F ; K et G des points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0} \quad ; \quad 3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF} = \vec{0} \quad ; \quad 2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

1/ Montrons que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

- **Pour le point E :** En utilisant la relation de Chasles, on introduit le point A dans le vecteur



$\overrightarrow{BE}$:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} &= \vec{0} \implies 3\overrightarrow{AE} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = \vec{0} \\ &\implies 3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AE} = \vec{0} \\ &\implies 5\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ &\implies 5\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \\ &\implies \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

- **Pour le point F :** En introduisant le point A dans le vecteur $\overrightarrow{CF}$:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF} &= \vec{0} \implies 3\overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) = \vec{0} \\ &\implies 3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AF} = \vec{0} \\ &\implies 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\implies 2\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC} \\ &\implies \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

2/ Montrons que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC}$ et déduisons-en que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

- **Montrons que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC}$:** En introduisant le point B dans le vecteur $\overrightarrow{CK}$:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK} &= \vec{0} \implies 2\overrightarrow{BK} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}) = \vec{0} \\ &\implies 2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BK} = \vec{0} \\ &\implies \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CB} \\ &\implies \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

- **Déduction pour $\overrightarrow{AK}$:** Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

3/ Relations du point G

- (a) **Montrons que $5\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$:** On sait d'après l'énoncé que $3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
Introduisons le point E dans les deux premiers vecteurs :

$$\begin{aligned} 3(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) + 2(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG}) - \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \\ (3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE}) + 3\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, $3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$. Il reste donc :

$$5\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$



- (b) **Montrons que $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$** : Reprenons la relation initiale et introduisons cette fois le point K dans les termes contenant B et C :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG} + 2(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KG}) - (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KG}) &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AG} + (2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK}) + \overrightarrow{KG} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Comme $2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK} = \vec{0}$, alors :

$$3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

4/ **Déduisons-en que G est le point d'intersection des droites (CE) et (AK)**

- De la relation $5\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$, on déduit que $\overrightarrow{CG} = 5\overrightarrow{EG}$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires par conséquent les points C , E et G sont alignés. Ainsi, $G \in (CE)$.
- De la relation $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$, on déduit que $\overrightarrow{KG} = -3\overrightarrow{AG}$, ce qui montre que les points K , A et G sont alignés. Ainsi, $G \in (AK)$.
- Par conséquent, G appartenant aux deux droites (CE) et (AK) , il est leur point d'intersection : $G = (CE) \cap (AK)$.

5/ **Montrons que G est le milieu du segment $[BF]$**

Il s'agit de montrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ (ou $2\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$).

Reprenons la relation de définition de G et regroupons les termes en A et C en y introduisant le point F :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \implies 3(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}) + 2\overrightarrow{BG} - (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG}) = \vec{0} \\ &\implies (3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}) + 3\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0} \end{aligned}$$

Comme $3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, il reste :

$$2\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0} \implies \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BG} = \vec{0} \implies \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

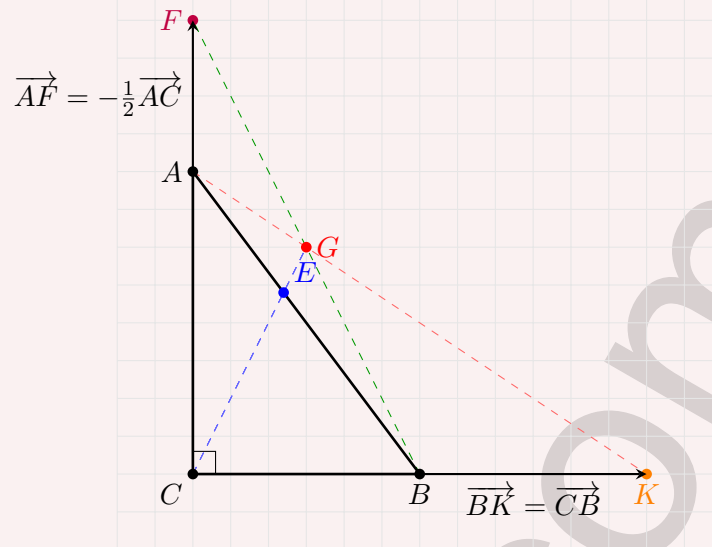
Le point G est donc bien le milieu du segment $[BF]$.

6/ **Écrivons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$**

En introduisant le point A dans les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CG}$ de la relation initiale :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \implies 3\overrightarrow{AG} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}) = \vec{0} \\ &\implies 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \vec{0} \\ &\implies 4\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &\implies \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

- 7/ **Remarque pour la construction géométrique** Remarque préliminaire : le triangle ABC est rectangle en C car ses longueurs vérifient la relation de Pythagore : $BC^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 = AB^2$.



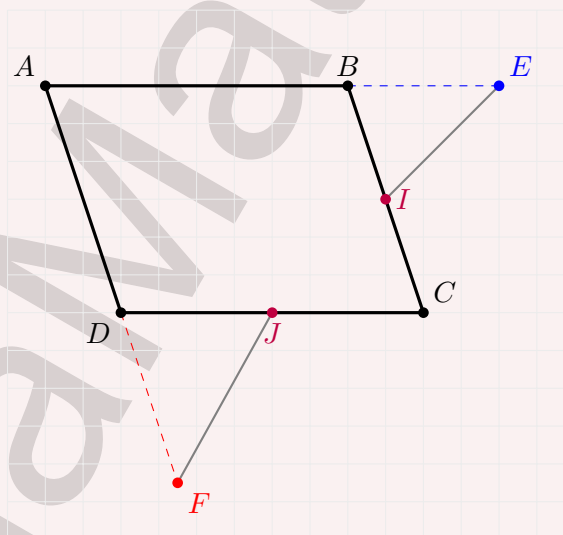
✓ Solution Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et E et F deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$$

où a et b sont deux réels quelconques.

1/ Figure géométrique (pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{4}$)



2/ Calcul de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

- Pour le vecteur $\overrightarrow{AE}$: En utilisant la relation de Chasles en introduisant le point B , on obtient :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AB} = (1 + a)\overrightarrow{AB}$$



- **Pour le vecteur $\overrightarrow{AF}$** : En introduisant le point D par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{AD} = (1 + b)\overrightarrow{AD}$$

3/ Calcul de $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

- **Pour le vecteur $\overrightarrow{IE}$** : Décomposons-le en passant par les points B et A :

$$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AE}$$

Comme I est le milieu du segment $[BC]$, on a $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, d'où $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

En remplaçant $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AE}$ (trouvé à la question 2), il vient :

$$\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + (1 + a)\overrightarrow{AB}$$

En réordonnant les termes :

$$\overrightarrow{IE} = (1 + a)\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

- **Pour le vecteur $\overrightarrow{JF}$** : Décomposons-le en introduisant les points D et A :

$$\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{AF}$$

Comme J est le milieu du segment $[DC]$, on a $\overrightarrow{JD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{JD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

En injectant cette relation ainsi que l'expression de $\overrightarrow{AF}$, on obtient :

$$\overrightarrow{JF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1 + b)\overrightarrow{AD}$$

4/ Relation entre a et b pour que (IE) et (JF) soient parallèles

Les droites (IE) et (JF) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ sont colinéaires. Leurs coordonnées dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ sont :

$$\overrightarrow{IE} \begin{pmatrix} 1 + a \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JF} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 + b \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\det(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{JF}) = 0 \iff (1 + a)(1 + b) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\iff (1 + a)(1 + b) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff 1 + a + b + ab - \frac{1}{4} = 0$$

$$\iff ab + a + b + \frac{3}{4} = 0$$

La relation cherchée entre a et b pour que les droites soient parallèles est donc :

$$4ab + 4a + 4b + 3 = 0$$

Solution Exercice 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

1/ Montrons que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$

En utilisant la relation de Chasles, exprimons le vecteur $\vec{IJ}$ de deux manières différentes en passant par les sommets du quadrilatère :

$$(\text{Chemin 1}) \quad \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ}$$

$$(\text{Chemin 2}) \quad \vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$$

En sommant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$2\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{AD} + \vec{BC} + (\vec{DJ} + \vec{CJ})$$

Or, d'après l'énoncé :

- I est le milieu de $[AB]$, donc $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
- J est le milieu de $[DC]$, donc $\vec{DJ} + \vec{CJ} = \vec{0}$.

L'égalité se simplifie ainsi en :

$$2\vec{IJ} = \vec{0} + \vec{AD} + \vec{BC} + \vec{0} \implies \vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$$

2/ Propriétés du trapèze avec $\vec{BC} = k\vec{AD}$

(a) Montrons que $\vec{IN} = \vec{MJ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$

- **Pour le vecteur $\vec{IN}$** : Dans le triangle ABD , I est le milieu de $[AB]$ et N est le milieu de $[BD]$. D'après le théorème des milieux sous sa forme vectorielle :

$$\begin{aligned} \vec{IN} &= \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DN} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DB} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AB}) \\ &= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AD} \end{aligned}$$

- **Pour le vecteur $\vec{MJ}$** : Dans le triangle ACD , M est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[DC]$. De la même manière :

$$\begin{aligned} \vec{MJ} &= \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DJ} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \frac{1}{2}\vec{AD} \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité : $\vec{IN} = \vec{MJ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$.



- (b) Montrons que $\vec{IJ} = \frac{k+1}{2} \vec{AD}$ En reprenant le résultat établi à la question 1 et en y substituant l'hypothèse $\vec{BC} = k\vec{AD}$, on obtient directement :

$$\vec{IJ} = \frac{1}{2} (\vec{AD} + k\vec{AD}) = \frac{k+1}{2} \vec{AD}$$

- (c) Déterminons la valeur du réel k pour que $\vec{IN} = \vec{MJ} = \vec{NM}$ Par la relation de Chasles, on peut décomposer le vecteur $\vec{IJ}$ en passant par les points N et M :

$$\vec{IJ} = \vec{IN} + \vec{NM} + \vec{MJ}$$

En remplaçant les expressions trouvées précédemment en fonction de $\vec{AD}$, on a :

$$\frac{k+1}{2} \vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AD} + \vec{NM} + \frac{1}{2} \vec{AD}$$

$$\frac{k+1}{2} \vec{AD} = \vec{AD} + \vec{NM} \Rightarrow \vec{NM} = \left(\frac{k+1}{2} - 1 \right) \vec{AD} = \frac{k-1}{2} \vec{AD}$$

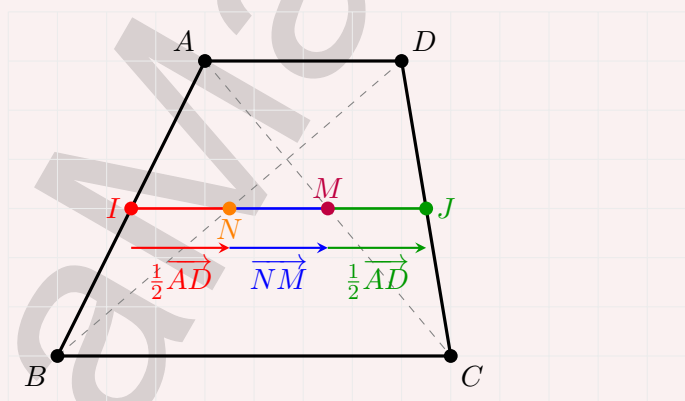
On cherche la valeur de k pour laquelle $\vec{NM} = \vec{IN} = \frac{1}{2} \vec{AD}$. Cela équivaut à l'égalité des coefficients :

$$\frac{k-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k-1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

La valeur du réel k recherchée est donc $k = 2$ (ce qui signifie que la base $[BC]$ est deux fois plus longue que la base $[AD]$).

3/ Figure géométrique représentative (pour le cas limite $k = 2$)

Voici la représentation exacte du trapèze correspondant à la configuration géométrique de la question 2-c, où les segments $[IN]$, $[NM]$ et $[MJ]$ ont tous la même longueur vectorielle.



✓ Solution Exercice 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et G le point du plan vérifiant la relation vectorielle :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$$

1. Montrons que $\vec{AG} = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$

En utilisant la relation de Chasles, introduisons le point A dans chacun des vecteurs de la relation



initiale :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \vec{0} \implies \overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0} \\ &\implies 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \\ &\implies 4\overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Comme $4\overrightarrow{GA} = -4\overrightarrow{AG}$, on obtient par inversion :

$$4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \implies \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

2. Propriétés des milieux M et P

- (a) **Montrons que $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$** Puisque M est le milieu de $[AB]$ et P le milieu de $[CD]$, nous pouvons utiliser la propriété géométrique du milieu sous sa forme vectorielle pour tout point du plan, notamment pour le point G :

$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$$

En additionnant ces deux expressions membre à membre :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}}_{=\vec{0} \text{ d'après l'énoncé}} \right) \\ \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} &= \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$

- (b) **Déduction pour le point G** L'égalité vectorielle $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ équivaut à écrire $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{PG}$. Cela prouve de manière univoque que le point G est le milieu du segment $[MP]$.
- (c) **Construction du point G** Pour placer précisément le point G , il suffit de :
1. Déterminer et placer le milieu M du segment $[AB]$.
 2. Déterminer et placer le milieu P du segment $[CD]$.
 3. Tracer le segment $[MP]$: le point G se situe exactement au milieu de ce segment.

3. Montrons que $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

De façon parfaitement analogue à la question 2-a, utilisons le fait que N est le milieu de $[BC]$ et Q est le milieu de $[AD]$:

$$\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD})$$

En sommant ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}$$

Ainsi, de manière analogue, G est également le milieu du segment $[NQ]$.

4. Montrons que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme

D'après les résultats des questions 2-b et 3 :

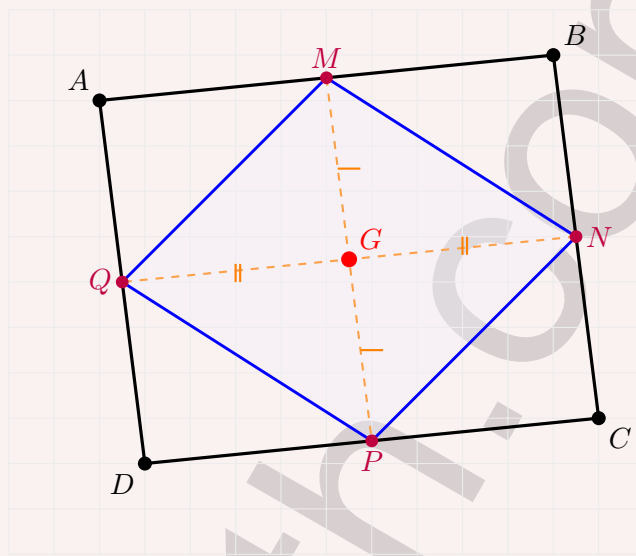


- Le point G est le milieu de la diagonale $[MP]$.
- Le point G est le milieu de la diagonale $[NQ]$.

Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu commun est un parallélogramme. Les diagonales étant $[MP]$ et $[NQ]$, le quadrilatère formé en reliant les sommets dans l'ordre est bien $MNPQ$.

Par conséquent, $MNPQ$ est un parallélogramme (appelé parallélogramme de Varignon du quadrilatère $ABCD$).

5. Figure géométrique représentative



✓ Solution Exercice 6

Soit ABC un triangle non rectangle et O le centre de son cercle circonscrit. On considère le point H défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

1. Montrons que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$

En utilisant la relation de Chasles, décomposons le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en passant par le point O :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}$$

En remplaçant $\overrightarrow{OH}$ par la relation de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Comme A' est le milieu du segment $[BC]$, la propriété vectorielle du milieu nous donne $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

En substituant cette égalité, on en déduit immédiatement :

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$$



2. Propriétés géométriques de la droite (AH) et nature du point H

- **Perpendicularité** : Par définition, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , donc la droite (OA') est la médiatrice du segment $[BC]$. Ainsi, la droite (OA') est perpendiculaire à la droite (BC) .

Or, d'après la question précédente, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires, et donc que les droites (AH) et (OA') sont parallèles.

La droite (AH) étant parallèle à une droite perpendiculaire à (BC) , elle est elle-même perpendiculaire à (BC) :

$$(AH) \perp (BC)$$

- **Signification de H** : La droite (AH) passe par le sommet A et est perpendiculaire au côté opposé (BC) , c'est donc la **hauteur** issue de A dans le triangle ABC .

Par un raisonnement parfaitement analogue en introduisant les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$, on démontrerait que (BH) et (CH) sont également les hauteurs issues de B et C .

Le point H , point d'intersection des hauteurs du triangle, est donc l'**orthocentre** du triangle ABC .

3. Montrons que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

Reprenons la relation de définition du point H et introduisons le centre de gravité G dans chacun des trois vecteurs de droite en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{OG} + \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{=\vec{0} \text{ par définition de } G}\end{aligned}$$

L'expression se simplifie directement en :

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

4. Conclusion sur la position relative de O , G et H

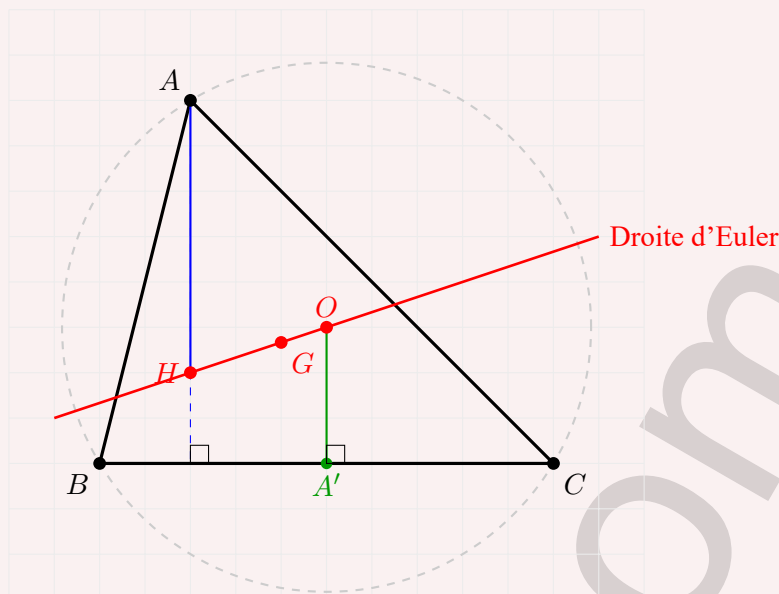
L'égalité vectorielle $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ montre que les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires et partagent le point d'origine commun O .

On en déduit que **les points O , G et H sont alignés**.

La droite qui passe par ces trois points remarquables s'appelle la **droite d'Euler** du triangle ABC .

5. Construction géométrique exacte (Droite d'Euler)

Voici la figure géométrique précise construite à partir de coordonnées théoriques exactes vérifiant toutes les hypothèses de l'exercice.



✓ Solution Exercice 7

Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[AC]$. On considère les points E , F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{AG} = -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AM}$$

1/ Alignement des points E , B et C

a) Calcul de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EB}$

• Pour le vecteur $\overrightarrow{EC}$: Par la relation de Chasles en passant par le point A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

• Pour le vecteur $\overrightarrow{EB}$: De la même manière :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

b) **Dédution de l'alignement** Observons les deux expressions obtenues à la question précédente :

$$\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = -3\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$

On remarque immédiatement que :

$$\overrightarrow{EC} = -3\overrightarrow{EB}$$



Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont colinéaires et possèdent le point E en commun. Par conséquent, les points E , B et C sont alignés.

2/ Montrons que le quadrilatère $MBEF$ est un parallélogramme

Pour prouver que $MBEF$ est un parallélogramme, il suffit de montrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EB}$.

- Exprimons d'abord $\overrightarrow{MF}$ en utilisant la relation de Chasles avec le point A :

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AF}$$

Comme M est le milieu de $[AC]$, on a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MF} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

- D'après la question 1/a), on sait que $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. On constate donc que :

$$\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{EB} \implies \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{EB}$$

L'égalité vectorielle $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{EB}$ (ou $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MB}$) démontre que le quadrilatère $MBEF$ est un parallélogramme.

3/ Montrons que les droites (AG) et (BC) sont parallèles

Commençons par simplifier l'expression du vecteur $2\overrightarrow{AG}$ donnée dans l'énoncé. On sait que M est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$:

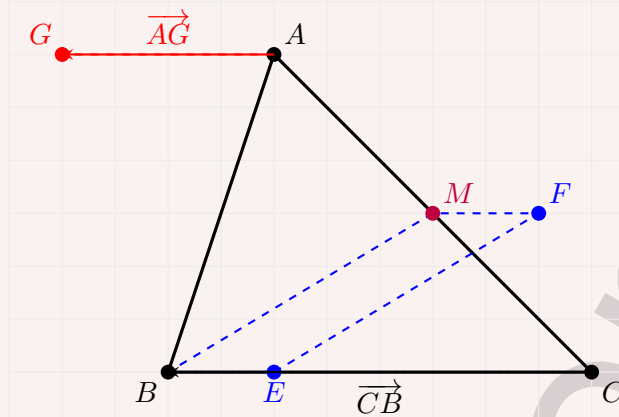
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{AG} &= -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 4\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

L'égalité $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

4/ Figure géométrique



✓ Solution Exercice 8

Soit ABC un triangle. On considère les points M , N et P tels que :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BN} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

1/ Figure géométrique



2/ Expressions des vecteurs $\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{PB}$



- **Montrons que** $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$: D'après l'énoncé, on a $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM}$. En inversant le sens du vecteur, on a :

$$\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{AM}$$

Utilisons la relation de Chasles en introduisant le point B dans le vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{NA} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})$$

Or, on sait que $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. En substituant cette égalité, on obtient :

$$\overrightarrow{NA} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$

- **Montrons que** $\overrightarrow{PB} = \frac{9}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$: D'après l'énoncé, on a $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$, ce qui implique $\overrightarrow{PB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{NB}$.

Exprimons d'abord le vecteur $\overrightarrow{NB}$ en passant par le point A :

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}$$

En remplaçant $\overrightarrow{NA}$ par l'expression trouvée juste au-dessus :

$$\overrightarrow{NB} = \left(2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$$

Maintenant, appliquons le coefficient $\frac{3}{5}$:

$$\overrightarrow{PB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{NB} = \frac{3}{5}\left(3\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{9}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$$

3/ Montrons que les points A , P et C sont alignés

Pour prouver l'alignement des points A , P et C , exprimons le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ afin de le comparer à $\overrightarrow{AC}$.

Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PB}$$

En utilisant l'expression de $\overrightarrow{PB}$ obtenue à la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} - \left(\frac{9}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \left(1 - \frac{9}{5}\right)\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{4}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. On en déduit donc :

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et partagent le point commun A . Par conséquent, les points A , P et C sont alignés.

4/ Intersection des droites (AC) et (BN)

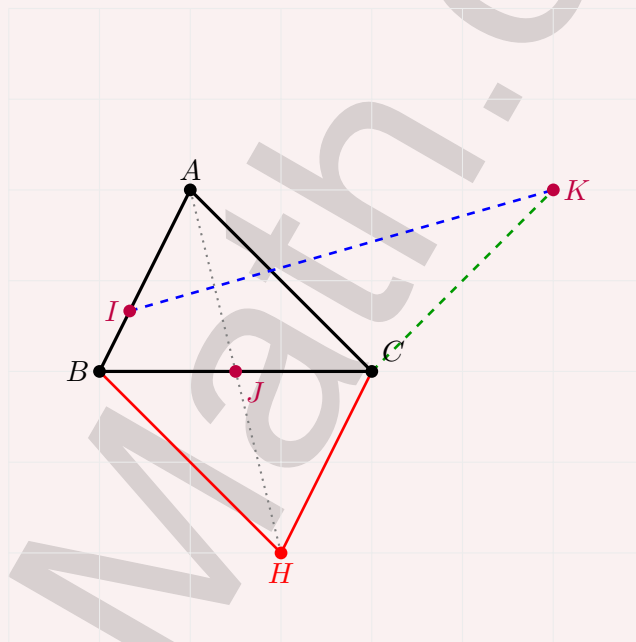
- D'après la question 3, les points A , P et C sont alignés, ce qui signifie que le point P appartient à la droite (AC) .
- D'après la relation de l'énoncé $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BN}$, les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les points B , P et N sont alignés. Le point P appartient donc aussi à la droite (BN) .
- Le point P appartenant simultanément aux deux droites, et le triangle ABC n'étant pas aplati (les droites (AC) et (BN) ne sont pas confondues), on en déduit que les droites (AC) et (BN) sont sécantes.
- Leur point d'intersection unique est le point P .

✓ Solution Exercice 9

Soit ABC un triangle. I , J et K trois points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$$

1/ Figure géométrique (incluant les questions 1 et 4-a)



2/ Expressions des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$

- **Montrons que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$** : En introduisons le point A puis le point B par la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. En remplaçant, il vient :

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

- **Montrons que $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$** : Par la relation de Chasles en passant par les points B et A :

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$$



On sait que $\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$. De plus, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

3/ Alignement des points I , J et K

a) Montrons que $3\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$

Calculons la combinaison vectorielle demandée en utilisant les résultats de la question 2 :

$$3\overrightarrow{IJ} = 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

Puisque $\overrightarrow{KJ} = -\overrightarrow{JK}$, on a d'après la question 2 :

$$\overrightarrow{KJ} = -\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

En faisant la somme :

$$3\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$$

b) Dédution de l'alignement

L'égalité $3\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{IJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires et possèdent le point commun J . Par conséquent, les points I , J et K sont alignés.

4/ Étude du point H et parallélisme

a) Placement du point H

Voir la figure à la question 1/

b) Nature du quadrilatère $ABHC$

L'énoncé stipule que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AJ}$, ce qui signifie géométriquement que J est le milieu du segment $[AH]$.

De plus, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, ce qui signifie que J est également le milieu du segment $[BC]$.

Le quadrilatère $ABHC$ possède ainsi ses deux diagonales $[AH]$ et $[BC]$ qui se coupent en leur milieu commun J . Par conséquent, $ABHC$ est un parallélogramme.

c) Montrons que (BH) et (AK) sont parallèles

Puisque $ABHC$ est un parallélogramme, ses côtés opposés sont vectoriellement égaux, on a donc :

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AC}$$

Or, d'après les données de l'énoncé, $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui implique par substitution :

$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{BH}$$

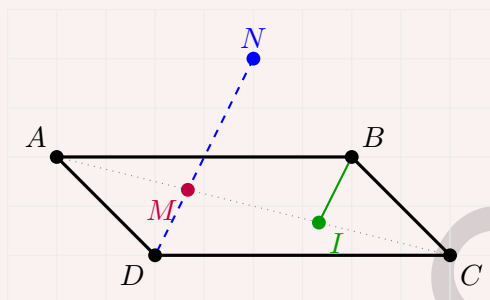
L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{BH}$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Par conséquent, les droites (BH) et (AK) sont parallèles.

 Solution Exercise 10


Soit $ABCD$ un parallélogramme. M et N deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$$

1/ Figure géométrique



2/ Expressions des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MD}$

- **Montrons que $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$** : Par la relation de Chasles, décomposons le vecteur en insérant les points A et B :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

Or, l'énoncé nous donne $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$. De plus, dans le parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

- **Montrons que $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$** : Introduisons le point A par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}$$

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on sait que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. En remplaçant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

3/ Alignement des points M , N et D

Comparons les deux vecteurs obtenus à la question précédente :

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$



On remarque en factorisant par -2 dans l'expression de $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{MN} = -2 \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right)$$

Ce qui nous donne directement la relation de colinéarité :

$$\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MD}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont colinéaires et possèdent le point M en commun. Par conséquent, les points M , N et D sont alignés.

4/ Propriétés des droites (BI) et (MN)

- (a) Montrons que $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ Comme I est le milieu du segment $[MC]$, on peut exprimer le point I via la relation : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

Décomposons d'abord $\overrightarrow{MC}$ en passant par A :

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Exprimons maintenant le vecteur $\overrightarrow{IB}$ en passant par M et A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} &= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

- (b) Montrons que les droites (BI) et (MN) sont parallèles Reprenons l'expression de $\overrightarrow{MN}$ trouvée à la question 2 et factorisons-la par 2 :

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = 2 \left(\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right)$$

En utilisant le résultat de la question 4-a, on observe que le terme entre parenthèses est exactement le vecteur $\overrightarrow{IB}$. On a donc :

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{BI}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires, ce qui prouve de manière rigoureuse que les droites (BI) et (MN) sont parallèles.

BON COURAGE