



Ensembles et Applications

Série Corrigée 4

1 BAC SM

S. EL JAAFARI



I– Énoncés des exercices



Exercice 1

- 1/ Montrer que $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$.
- 2/ Que peut-on dire de deux ensembles A et B tels que $A \cap B = A \cup B$?
- 3/ Montrer que $A \cap C = A \cup B \iff B \subset A \subset C$.
- 4/ Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut s'écrire comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.
- 5/ Montrer que $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F$.
- 6/ Montrer que $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.



Exercice 2

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que :

- 1/ si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- 2/ si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- 3/ si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.
- 4/ si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.



Exercice 3

Soit E un ensemble non vide.

- 1/ soient F et G deux sous ensembles de E . Montrer que

$$\star \quad F \subset G \iff F \cup G = G$$

$$\star \quad F \subset G \iff F \cap G = F$$

$$\star \quad F \subset G \iff \overline{F} \cup G = E$$

$$\star \quad F \subset G \iff F \cap \overline{G} = \emptyset$$

- 2/ Soient A, B et C trois parties de E . Montrer les propriétés suivantes :

$$\text{a) } (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$

$$\text{b) } (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$$

$$c) (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

3/ Soient A et B deux parties de E . Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes :

$$* X \cup A = B$$

$$* X \cap A = B$$

$$* X \setminus A = B$$



Exercice 4

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

1/ Soient A' et B' deux parties de F . Démontrer que :

a/ $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$. La réciproque est-elle vraie ?

b/ $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

c/ $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

2/ Soient A et B deux parties de E . démontrer que :

a/ $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?

b/ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?

c/ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 5

On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

1/ Montrer que f n'est pas surjective.

2/ On définit l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

a) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie et surjective.

b) Montrer que $\tilde{f}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 6

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

1/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(1-x) = f(x)$ et en déduire que f n'est pas injective.

2/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire que f n'est pas surjective.

3/ Soit g la restriction de f à $I = [\frac{1}{2}, +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer g^{-1} .

4/ Soit h la restriction de f à $]-\infty, \frac{1}{2}]$ et k l'application de J dans I définie par $k(x) = 1 - x$.



- a) Montrer que $h = g \circ k$.
- b) En déduire que h est bijective et déterminer h^{-1} .



Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+} &\longrightarrow \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+} \\ (x; y) &\longmapsto \left(xy; \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

- 1/ Montrer que f est une application.
- 2/ Montrer que f est injective et surjective.
- 3/ Déterminer f^{-1} .



Exercice 8

- 1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = x^2 - 2x - 2.$$

- a) Déterminer la nature de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f , et ses éléments caractéristiques.
- b) Dresser un tableau de variation pour f .
- c) Construire $\mathcal{C}_f$.

- 2/ On considère la fonction numérique u définie par :

$$u(x) = \sqrt{2x+1}.$$

- a) Déterminer le domaine de définition de u .
- b) Dresser un tableau de variation pour la fonction u .

- 3/ On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x) = 2x - 1 - 2\sqrt{2x+1}.$$

- a) Déterminer $\mathcal{D}_h$ le domaine de définition de h .
- b) Vérifier que : $(\forall x \in \mathcal{D}_h), h(x) = (f \circ u)(x)$.
- c) Déduire les variations de h sur les intervalles suivants : $[-\frac{1}{2}; 0]$ et $[0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de h .

- 4/ Soit k la restriction de h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- a) En utilisant les tableaux de variations respectifs de u et f , montrer que $k([0; +\infty[) = [-3; +\infty[$.
- b) Montrer que la fonction k est bijective de $[0; +\infty[$ vers $[-3; +\infty[$, et déterminer sa bijection réciproque.

- 5/ a) Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation : $k(x) = x$.

- b) Déduire l'ensemble des nombres réels x qui vérifient : $k(x) \leq x \leq k^{-1}(x)$.



Exercice 9

1/ Déterminer en extension l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = -5\}.$$

2/ On considère l'ensemble

$$B = \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} / (x, y) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}.$$

a) Montrer que $0 \notin B$ et que $\frac{1}{2} \in B$.

b) Montrer que $B \subset]0; 1]$.

3/ On considère les deux ensembles

$$E = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que : $E \cap F = \emptyset$.

4/ On considère les deux ensembles

$$I = \left\{ n \in \mathbb{N}^* / \frac{6}{n} \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{et} \quad J = \{x \in \mathbb{R} / 2x < 5\}.$$

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.



Exercice 10

1/ On considère l'application g définie par :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (5x + 3y, 3x + 5y) \end{aligned}$$

a) Montrer que g est injective et surjective.

b) Déterminer l'expression de g^{-1} .

2/ On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (p, q) &\longmapsto (2p + 1) 2^q \end{aligned}$$

Montrer que f est injective. f est-elle surjective?

3/ Soit h l'application définie par :

$$\begin{aligned} h : [1, +\infty[&\longrightarrow]0, \sqrt{3}] \\ x &\longmapsto \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Montrer que l'application h est bijective et donner l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout x de $]0, \sqrt{3}]$.



II– Corrigés de exercices

✓ Solution Exercice 1

1/ Soit E un ensemble non vide et $A \subset E$ et $B \subset E$. Par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, regroupons les deux premiers termes :

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A} \cap (B \cup \overline{B}) = \overline{A} \cap E = \overline{A}$$

Car $\overline{B} \cup B = E$ et $\overline{A} \cap E = \overline{A}$. Donc :

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup (A \cap B)$$

Par distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$\overline{A} \cup (A \cap B) = (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) = E \cap (\overline{A} \cup B) = \overline{A} \cup B$$

D'où :

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$$

2/ Pour tous ensembles A et B , on a toujours la chaîne d'inclusions naturelle suivante :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

Puisqu'on a $A \cap B = A \cup B$, alors $A \cap B = A = A \cup B$ et $A \cap B = B = A \cup B$. D'où : $A = B$.

Réciproquement, si $A = B$, on a bien $A \cap A = A \cup A = A$. Alors La condition est donc nécessaire et suffisante, soit :

$$A \cap B = A \cup B \iff A = B$$

3/ Pour montrer l'équivalence, montrons les deux implications qui la composent :

$\implies$) **Sens direct** : Supposons que $A \cap C = A \cup B$.

- Comme $B \subset A \cup B$, on a $B \subset A \cap C$, ce qui implique en particulier que $B \subset A$.
- Comme $A \subset A \cup B$, on a $A \subset A \cap C$, ce qui implique en particulier que $A \subset C$.

En combinant ces deux résultats, on obtient bien : $B \subset A \subset C$. Donc :

$$A \cap C = A \cup B \implies B \subset A \subset C$$

$\impliedby$) **Sens réciproque** : Supposons que $B \subset A \subset C$.

- Puisque $B \subset A$, on a $A \cup B = A$.
- Puisque $A \subset C$, on a $A \cap C = A$.

Par transitivité, on en déduit directement que : $A \cap C = A \cup B$. Donc

$$B \subset A \subset C \implies A \cap C = A \cup B$$

Conclusion :

$$A \cap C = A \cup B \iff B \subset A \subset C$$

4/ Notons $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité fermé. Supposons par l'absurde qu'il existe deux parties I et J de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} = I \times J$.

- Le point $(1, 0) \in \mathcal{D}$ car $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$. On en déduit que $1 \in I$ et $0 \in J$.
- Le point $(0, 1) \in \mathcal{D}$ car $0^2 + 1^2 = 1 \leq 1$. On en déduit que $0 \in I$ et $1 \in J$.



Puisque $1 \in I$ et $1 \in J$, alors $(1, 1) \in I \times J = \mathcal{D}$.

Or, $1^2 + 1^2 = 2 > 1$, ce qui signifie que $(1, 1) \notin \mathcal{D}$. ce qui est absurde car $(1, 1) \in \mathcal{D}$.

Alors $\mathcal{D}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

5/

$$\begin{aligned}(x, y) \in (E \times F) \cup (G \times F) &\iff (x \in E \text{ et } y \in F) \text{ ou } (x \in G \text{ et } y \in F) \\ &\iff (x \in E \text{ ou } x \in G) \text{ et } y \in F \\ &\iff x \in (E \cup G) \text{ et } y \in F \\ &\iff (x, y) \in (E \cup G) \times F\end{aligned}$$

D'où :

$$(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F$$

6/

$$\begin{aligned}(x, y) \in (E \times F) \cap (G \times H) &\iff (x \in E \text{ et } y \in F) \text{ et } (x \in G \text{ et } y \in H) \\ &\iff (x \in E \text{ et } x \in G) \text{ et } (y \in F \text{ et } y \in H) \\ &\iff x \in (E \cap G) \text{ et } y \in (F \cap H) \\ &\iff (x, y) \in (E \cap G) \times (F \cap H)\end{aligned}$$

D'où :

$$(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$$

✓ Solution Exercice 2

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrons que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f l'est aussi.

Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

$$\begin{aligned}f(x) = f(x') &\implies g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\implies (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\implies x = x'\end{aligned}$$

Car $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit immédiatement que : L'application f est injective.

2. Montrons que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g l'est aussi.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f : E \rightarrow G$ est surjective, il existe un élément $x \in E$ tel que :

$$(g \circ f)(x) = z \implies g(f(x)) = z$$

Posons $y = f(x)$. Comme $f : E \rightarrow F$, on a bien $y \in F$. On a donc trouvé un élément $y \in F$ tel que :

$$g(y) = z$$

L'application g est donc surjective.

3. Montrons que $(g \circ f$ surjective et g injective) $\Rightarrow f$ surjective

Supposons que $g \circ f$ est surjective et g est injective. Montrons que f est surjective.



Soit $y \in F$. On cherche à montrer qu'il existe un antécédent de y par f dans E .
 Considérons son image par g , notée $z = g(y) \in G$. Comme l'application $g \circ f$ est surjective, il existe un élément $x \in E$ tel que :

$$(g \circ f)(x) = z \implies g(f(x)) = g(y)$$

Or, l'application g est injective par hypothèse. Par conséquent, de l'égalité $g(f(x)) = g(y)$, on déduit :

$$f(x) = y$$

On a trouvé un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$, donc l'application f est **surjective**.

4. Montrons que $(g \circ f \text{ surjective et } f \text{ surjective}) \implies g \text{ injective}$

Supposons que $g \circ f$ est injective et f est surjective. Montrons que g est injective.

Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$.

Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et il existe $x' \in E$ tel que $y' = f(x')$.

Substituons ces expressions dans l'égalité de départ :

$$\begin{aligned} g(y) = g(y') &\implies g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\implies (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\implies x = x' \\ &\implies f(x) = f(x') \\ &\implies y = y' \end{aligned}$$

Car l'application $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit que : L'application g est **donc injective**.

✓ Solution Exercice 3

Soit E un ensemble non vide, et $F, G \in \mathcal{P}(E)$.

1/ $* F \subset G \iff F \cup G = G$

($\implies$) Supposons $F \subset G$. On sait que $G \subset F \cup G$ est toujours vrai. Réciproquement, comme $F \subset G$ et $G \subset G$, on a $(F \cup G) \subset G$. D'où $F \cup G = G$.

($\impliedby$) Supposons $F \cup G = G$. Comme on a toujours $F \subset F \cup G$, on en déduit immédiatement que $F \subset G$.

$* F \subset G \iff F \cap G = F$

($\implies$) Supposons $F \subset G$. On a toujours $F \cap G \subset F$. Réciproquement, si $x \in F$, alors $x \in G$ (car $F \subset G$), donc $x \in F \cap G$, d'où $F \subset F \cap G$. Ainsi $F \cap G = F$.

($\impliedby$) Supposons $F \cap G = F$. Comme on a toujours $F \cap G \subset G$, on remplace $F \cap G$ par F pour obtenir $F \subset G$.

$* F \subset G \iff \bar{F} \cup G = E$

($\implies$) Supposons $F \subset G$. Alors $\bar{G} \subset \bar{F}$. Ainsi : $\bar{F} \cup G \supset \bar{G} \cup G = E$. Comme l'union est incluse dans E , on a $\bar{F} \cup G = E$.

($\impliedby$) Supposons $\bar{F} \cup G = E$. Soit $x \in F$. Alors $x \notin \bar{F}$. Comme $x \in E = \bar{F} \cup G$, x doit obligatoirement appartenir à G . Donc $F \subset G$.

$* F \subset G \iff F \cap \bar{G} = \emptyset$

($\implies$) Supposons $F \subset G$. Si $x \in F \cap \bar{G}$, alors $x \in F$ (donc $x \in G$) et $x \in \bar{G}$ (donc $x \notin G$), ce qui est absurde. Donc $F \cap \bar{G} = \emptyset$.



($\Leftarrow$) Supposons $F \cap \bar{G} = \emptyset$. Soit $x \in F$. Si $x \notin G$, alors $x \in \bar{G}$, donc $x \in F \cap \bar{G}$, ce qui contredit le fait que cet ensemble soit vide. Donc $x \in G$, d'où $F \subset G$.

2/ Rappelons que par définition, $A \setminus C = A \cap \bar{C}$.

a) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

En utilisant la commutativité et l'associativité de l'intersection :

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cap (\bar{C} \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap B) \setminus C$$

b) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ En utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) = (A \cup B) \cap \bar{C} = (A \cup B) \setminus C$$

c) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ Développons chaque membre avec les intersections et les complémentaires (lois de De Morgan) :

i. **Premier terme :**

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C)$$

Par distributivité :

$$(A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup \emptyset = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

ii. **Deuxième terme :**

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

iii. **Troisième terme :**

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Les trois expressions étant égales à $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, l'égalité est démontrée.

3/ * Équation $X \cup A = B$

• **Condition d'existence :** Comme $A \subset X \cup A$, donc il faut que $A \subset B$

• **Résolution :**

– si $A \not\subset B$, alors $S = \emptyset$

– Si $A \subset B$, on a : $X \cup A = B \implies X \subset B$. En plus $x \in B \setminus A \implies (x \in B \text{ et } x \notin A) \implies (x \in (X \cup A) \text{ et } x \notin A)$ donc $x \in X$. Par conséquent $(B \setminus A) \subset X$. D'où $(B \setminus A) \subset X \subset B$.

Inversement soit $X = (B \setminus A) \cup C$ avec $C \subset A$. On a $X \cup A = (B \setminus A) \cup C \cup A = (B \setminus A) \cup A = B$, donc $X = (B \setminus A) \cup C$ avec $C \subset A$ est solution de l'équation $X \cup A = B$. Par suite si $A \subset B$, on a :

$$S = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid (B \setminus A) \subset X \subset B\}$$

– **Conclusion :**

$$\begin{cases} \text{Si } A \not\subset B; S = \emptyset \\ \text{Si } A \subset B; S = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid (B \setminus A) \subset X \subset B\} \end{cases}$$

* Équation $X \cap A = B$

• **Condition d'existence :** Comme $X \cap A \subset A$, Il faut que $B \subset A$.



• **Résolution :**

– Si $B \not\subset A$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

– Si $B \subset A$, alors $X \cap A \subset X$, donc $B \subset X$.

En plus $x \in A \setminus B \implies x \notin X$, par contraposée $x \in X \implies x \notin (A \setminus B)$ donc $X \subset \overline{(A \setminus B)} = B \cup \overline{A}$.

D'où $B \subset X \subset (B \cup \overline{A})$.

Inversement, $X = B \cup C$ avec $C \subset \overline{A}$, on a : $X \cap A = (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) = B \cup \emptyset = B$. Donc X est solution de cette équation.

– **Conclusion :**

$$\begin{cases} \text{Si } B \not\subset A, \text{ alors } \mathcal{S} = \emptyset \\ \text{Si } B \subset A, \text{ alors } \mathcal{S} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset (B \cup \overline{A})\} \end{cases}$$

* Équation $X \setminus A = B$

• **Condition d'existence :** Par définition, $X \setminus A = X \cap \overline{A} = B$, donc $X \setminus A \subset \overline{A} \implies B \subset \overline{A} \implies B \cap A = \emptyset$ donc il faut que $B \cap A = \emptyset$.

• **Résolution :**

– Si $B \cap A \neq \emptyset$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

– Si $B \cap A = \emptyset$

• Si $x \in B$ alors $x \notin A$ car $B \cap A = \emptyset$ et $x \in X$. D'où $B \subset X$.

• Si $x \notin (A \cup B)$ alors $x \notin B = X \setminus A$ et $x \notin A$ donc $x \notin X$. Par contraposée $x \in X \implies x \in (A \cup B)$. D'où $X \subset (A \cup B)$.

• Si X est solution de l'équation $X \setminus A = B$ alors $B \subset X \subset (A \cup B)$.

Inversement Soit $X = B \cup C$ avec $C \subset A$. Alors $X \setminus A = (B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A) = B \cup \emptyset = B$ Donc $X = B \cup C$ avec $C \subset A$ est solution de cette équation.

– **Conclusion :**

$$\begin{cases} \text{Si } B \cap A \neq \emptyset, \text{ alors } \mathcal{S} = \emptyset. \\ \text{Si } B \cap A = \emptyset, \text{ alors } \mathcal{S} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup A\} \end{cases}$$

✓ Solution Exercice 4

1/ Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

Soient A' et B' deux parties de F

a) **Démontrons que :** $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

Supposons que $A' \subset B'$. Soit $x \in f^{-1}(A')$ donc $f(x) \in A'$ par conséquent $f(x) \in B'$ d'où $x \in f^{-1}(B')$.

Par suite $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.

La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet prenons $E = \{1\}$ et $F = \{1, 2\}$ et l'application $f : E \rightarrow F$ définie par $f(1) = 1$; soit $A' = \{2\}$ et $B' = \{1\}$. Alors $f^{-1}(A') = \emptyset$ et $f^{-1}(B') = \{1\}$. On a $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$ et pourtant $A' \not\subset B'$

b) **Démontrons que :** $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

• On a $A' \cap B' \subset A'$ et $A' \cap B' \subset B'$, donc $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A')$ et $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(B')$; par conséquent $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$. (i)

• Inversement soit $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$, alors $x \in f^{-1}(A')$ et $x \in f^{-1}(B')$ par suite $f(x) \in A'$ et $f(x) \in B'$ donc $f(x) \in A' \cap B'$, d'où $x \in f^{-1}(A' \cap B')$. Par conséquent $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$. (ii)



- D'après les résultats (i) et (ii), on déduit que $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
- c) **Démontrons que : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$**
 - On a $A' \subset A' \cup B'$ et $B' \subset A' \cup B'$, alors $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(A' \cup B')$ et $f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$, donc $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$. (j)
 - Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A' \cup B')$, alors $f(x) \in A' \cup B'$, donc $f(x) \in A'$ ou $f(x) \in B'$, par suite $x \in f^{-1}(A')$ ou $x \in f^{-1}(B')$. D'où $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$. Par conséquent $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$. (jj)
 - D'après les résultats (j) et (jj), on déduit que $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

2/ Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

Soient A et B deux parties de E

a) **Démontrons que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.**

Supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, comme $A \subset B$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$, donc $y \in f(B)$. Par conséquent $f(A) \subset f(B)$. D'où : $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.

La réciproque de cette implication n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1\}$ et $f : E \rightarrow F$ définie par : $f(1) = f(2) = 1$ et prenons $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors $f(A) = f(B) = \{1\}$ et pourtant $A \not\subset B$.

b) **Démontrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$**

On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, alors $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$, par conséquent $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

L'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie ce que l'on constate en reprenant le même contre exemple que la réponse précédente.

c) **Démontrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$**

- On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, alors $f(A) \subset f(A \cup B)$ et $f(B) \subset f(A \cup B)$. D'où $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ (i).
- Soit $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$, donc $x \in A$ ou $x \in B$ par suite $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, d'où $y \in f(A) \cup f(B)$. Par conséquent $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ (ii).
- D'après les résultats (i) et (ii) on déduit que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

✓ Solution Exercice 5

1/ **Montrons que f n'est pas surjective :**

Une application est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent dans l'ensemble de départ. Cherchons les antécédents d'un réel $y \in \mathbb{R}$ par f en résolvant l'équation $f(x) = y$:

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\iff \frac{x+1}{x+2} = y \\
 &\iff x+1 = y(x+2) \\
 &\iff x+1 = yx+2y \\
 &\iff x-yx = 2y-1 \\
 &\iff x(1-y) = 2y-1
 \end{aligned}$$

Si nous choisissons $y = 1$, l'équation devient $x(0) = 1$, soit $0 = 1$, ce qui est impossible.

Le réel 1 n'a donc aucun antécédent par f dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Par conséquent, **f n'est pas surjective.**



$$2/ \tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

a) Montrons que $\tilde{f}$ est bien définie et surjective :

- Pour que $\tilde{f}$ soit bien définie, il faut que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, son image $\tilde{f}(x)$ appartienne à l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Supposons qu'il existe un réel x tel que $\tilde{f}(x) = 1$. D'après l'étude de la question 1, cela aboutit à l'égalité impossible $0 = 1$. Ainsi, l'image de tout élément de l'ensemble de départ est bien différente de 1. L'application est **bien définie**.
- Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Puisque $y \neq 1$, le terme $(1 - y)$ est non nul. On peut donc isoler x à partir de l'équation de la question 1 :

$$x = \frac{2y - 1}{1 - y}$$

Vérifions que cet antécédent x appartient bien à l'ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

$$\frac{2y - 1}{1 - y} = -2 \iff 2y - 1 = -2(1 - y) \iff 2y - 1 = -2 + 2y \iff -1 = -2$$

Cette égalité étant impossible, l'antécédent x n'est jamais égal à -2 . Tout élément $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet donc un antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. L'application $\tilde{f}$ est **surjective**.

b) Montrons que $\tilde{f}$ est bijective et déterminons sa bijection réciproque :

D'après la question précédente on a montré que l'application $\tilde{f}$ est surjective (i)

Soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R} \setminus -2$ tels que $f(x) = f(x')$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\implies \frac{x+1}{x+2} = \frac{x'+1}{x'+2} \\ &\implies (x+1)(x'+2) = (x+2)(x'+1) \\ &\implies xx' + 2x + x' + 2 = xx' + x + 2x' + 2 \\ &\implies x = x' \end{aligned}$$

Donc l'application $\tilde{f}$ est injective (ii)

De (i) et (ii), on déduit que l'application $\tilde{f}$ est bijective.

Sa bijection réciproque $\tilde{f}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est définie par :

$$\tilde{f}^{-1}(y) = \frac{2y - 1}{1 - y}$$

✓ Solution Exercice 6

L'application est définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notez que le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$, donc le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$, et f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1/ Étude de l'injectivité :

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $f(1 - x)$:

$$\begin{aligned} f(1 - x) &= \sqrt{(1 - x)^2 - (1 - x) + 1} \\ &= \sqrt{(1 - 2x + x^2) - 1 + x + 1} \\ &= \sqrt{x^2 - x + 1} = f(x) \end{aligned}$$



On a bien $\forall x \in \mathbb{R} : f(1-x) = f(x)$.

- **Dédution :** Choisissons par exemple $x = 0$. On a $1-x = 1$. D'après la relation précédente $f(1) = f(0) = 1$. Puisque $0 \neq 1$ mais $f(0) = f(1)$, l'application f **n'est pas injective**.

2/ Étude de la surjectivité :

- Mettons le trinôme sous forme canonique :

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Comme $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, on en déduit que $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$. La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, il vient :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- **Dédution :** L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$. Or, toutes les images par f sont supérieures ou égales à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par exemple, le nombre 0 appartient à l'ensemble d'arrivée mais n'admet aucun antécédent (car $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$). Par conséquent, f **n'est pas surjective**.

3/ Étude de la restriction g à $I = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

- a) **Bijection et intervalle J :** La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ car la fonction $x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ l'est. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de I vers l'intervalle image $J = g(I)$.

$$J = \left[g\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right[$$

- b) **Détermination de g^{-1} :** Soit $y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$ et $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Résolvons $g(x) = y$:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = y \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = y^2 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = y^2 - \frac{3}{4}$$

Comme $x \geq \frac{1}{2}$, on a $x - \frac{1}{2} \geq 0$. En passant à la racine carrée :

$$x - \frac{1}{2} = \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}} \iff x = \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}$$

L'application réciproque $g^{-1} : \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\rightarrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ est définie par :

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}$$

4/ Étude de la restriction h à $]-\infty, \frac{1}{2}]$:

- a) **Montrons que $h = g \circ k$:** Soit $x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$. On a $k(x) = 1 - x$. Puisque $x \leq \frac{1}{2}$, on a $-x \geq -\frac{1}{2}$ d'où $1 - x \geq \frac{1}{2}$, donc $k(x) \in I$. On peut alors appliquer g :

$$(g \circ k)(x) = g(k(x)) = f(1 - x)$$

D'après la question 1, $f(1 - x) = f(x) = h(x)$ (car $x \in]-\infty, \frac{1}{2}]$). On a bien $h = g \circ k$.

- b) **Bijection et calcul de h^{-1} :**



- $k :]-\infty, \frac{1}{2}] \longrightarrow [\frac{1}{2}, +\infty[$ est une bijection (fonction affine strictement décroissante).
- $g : [\frac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ est une bijection.

Par composition de deux bijections, h est **bijjective** de $]-\infty, \frac{1}{2}]$ vers $J = [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$.

Déterminons sa réciproque $h^{-1} = (g \circ k)^{-1} = k^{-1} \circ g^{-1}$. Tout d'abord, cherchons $k^{-1}(z)$:
 $k(x) = z \iff 1 - x = z \iff x = 1 - z$, donc $k^{-1}(z) = 1 - z$. Pour tout $y \in J$:

$$h^{-1}(y) = k^{-1}(g^{-1}(y)) = 1 - g^{-1}(y) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{y^2 - \frac{3}{4}}$$

✓ Solution Exercice 7

1/ f est une application

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$, c'est-à-dire $x > 0$ et $y > 0$. Alors :

- $xy > 0$ (produit de deux réels strictement positifs);
- $\frac{y}{x} > 0$ (quotient de deux réels strictement positifs).

Donc $f(x; y) = \left(xy; \frac{y}{x}\right) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$. Ainsi, f est bien une application de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ dans lui-même.

2/ f est injective et surjective

Injectivité. Soient $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ tels que $f(x; y) = f(x'; y')$. Alors :

$$\begin{cases} xy = x'y' \\ \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \end{cases}$$

En multipliant les deux égalités membre à membre :

$$xy \cdot \frac{y}{x} = x'y' \cdot \frac{y'}{x'} \implies y^2 = y'^2.$$

Comme $y > 0$ et $y' > 0$, on obtient $y = y'$. En reportant dans $xy = x'y'$, on a $xy = x'y$, et comme $y \neq 0$, $x = x'$. Donc $(x; y) = (x'; y')$: f est injective.

Surjectivité. Soit $(u; v) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$. Cherchons $(x; y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ tel que $f(x; y) = (u; v)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = vx$. En reportant dans la première : $vx^2 = u$, soit $x^2 = \frac{u}{v}$. Comme $x > 0$, on pose :

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} > 0 \quad \text{et} \quad y = vx = v\sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{uv} > 0.$$

Vérification :

$$xy = \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \sqrt{uv} = \sqrt{u^2} = u \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{u/v}} = \sqrt{v^2} = v.$$

Donc $(u; v)$ admet un antécédent : f est surjective.



3/ Détermination de f^{-1}

Puisque f est bijective, f^{-1} existe. D'après la question précédente, pour tout $(u; v) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$:

$$f^{-1}(u; v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}; \sqrt{uv} \right).$$

✓ Solution Exercice 8

1/ Étude de f

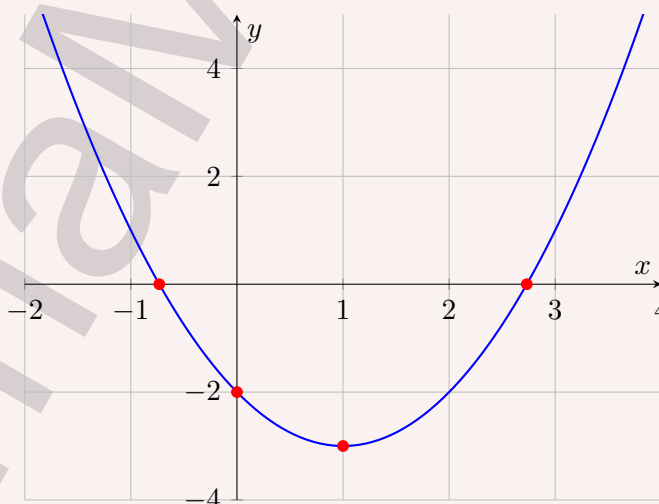
a) Nature de $\mathcal{C}_f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2 - 3$ (forme canonique).

- $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S(1; -3)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$. Elle est tournée vers le haut car le coefficient de x^2 est positif.
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = -2$, donc le point $(0; -2)$.
- Intersections avec l'axe des abscisses : $x^2 - 2x - 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 + 8 = 12$, donc $x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$. Les points sont $(1 - \sqrt{3}; 0)$ et $(1 + \sqrt{3}; 0)$.

b) Tableau de variation. f est décroissante sur $] -\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$, avec $f(1) = -3$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

c) Construction de $\mathcal{C}_f$.



2/ Étude de u



a) Domaine de définition. $u(x)$ existe si et seulement si $2x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{D}_u = [-\frac{1}{2}; +\infty[$.

b) Tableau de variation. La fonction $x \mapsto 2x + 1$ est strictement croissante et la racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc u est strictement croissante sur $\mathcal{D}_u$. De plus $u(-\frac{1}{2}) = 0$.

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$u(x)$	0	$+\infty$

3/ Étude de h

a) Domaine de définition. $h(x)$ existe si et seulement si $2x + 1 \geq 0$, donc $\mathcal{D}_h = [-\frac{1}{2}; +\infty[$.

b) Vérification. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $u(x) = \sqrt{2x + 1}$, donc $u(x)^2 = 2x + 1$ et :

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)) = u(x)^2 - 2u(x) - 2 = (2x + 1) - 2\sqrt{2x + 1} - 2 = 2x - 1 - 2\sqrt{2x + 1} = h(x).$$

c) Variations de h .

- Sur $[-\frac{1}{2}; 0]$: u est croissante et $u([-\frac{1}{2}; 0]) = [0; 1]$. Or f est décroissante sur $[0; 1] \subset]-\infty; 1]$. Par composition d'une fonction croissante suivie d'une fonction décroissante, $h = f \circ u$ est décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 0]$.
- Sur $[0; +\infty[$: u est croissante et $u([0; +\infty[) = [1; +\infty[$. Or f est croissante sur $[1; +\infty[$. Donc h est croissante sur $[0; +\infty[$.

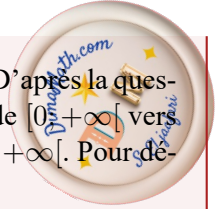
Valeurs : $h(-\frac{1}{2}) = -2$, $h(0) = -3$.

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$h(x)$	-2	-3	$+\infty$

4/ Étude de k

a) Image de $[0; +\infty[$ par k . D'après les tableaux de variations : $u([0; +\infty[) = [1; +\infty[$ car u est continue et croissante avec $u(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$. Ensuite, f est continue et croissante sur $[1; +\infty[$, avec $f(1) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc $f([1; +\infty[) = [-3; +\infty[$. Ainsi :

$$k([0; +\infty[) = f(u([0; +\infty[)) = f([1; +\infty[) = [-3; +\infty[.$$



b) Bijectivité. La fonction k est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc injective. D'après la question précédente, elle est surjective de $[0; +\infty[$ sur $[-3; +\infty[$. Donc k est bijective de $[0; +\infty[$ vers $[-3; +\infty[$. Sa bijection réciproque k^{-1} est définie sur $[-3; +\infty[$, à valeurs dans $[0; +\infty[$. Pour déterminer son expression, on résout $k(x) = y$ avec $x \geq 0$:

$$2x - 1 - 2\sqrt{2x + 1} = y.$$

On pose $t = \sqrt{2x + 1} \geq 0$, donc $x = \frac{t^2 - 1}{2}$. L'équation devient $t^2 - 2 - 2t = y$, soit $t^2 - 2t - (2 + y) = 0$. Le discriminant est $\Delta' = 1 + 2 + y = y + 3 \geq 0$, et comme $t \geq 1$ (car $x \geq 0$), on retient $t = 1 + \sqrt{y + 3}$. Donc :

$$x = \frac{(1 + \sqrt{y + 3})^2 - 1}{2} = \frac{y + 3 + 2\sqrt{y + 3}}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-3; +\infty[$:

$$k^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2} + \sqrt{x + 3}.$$

5/ Équation $k(x) = x$ et inéquation

a) Résolution de $k(x) = x$ sur $[0; +\infty[$. Pour $x \geq 0$:

$$k(x) = x \iff 2x - 1 - 2\sqrt{2x + 1} = x \iff x - 1 = 2\sqrt{2x + 1}.$$

Une condition nécessaire est $x - 1 \geq 0$, donc $x \geq 1$. En élevant au carré (les deux membres sont positifs) :

$$x^2 - 2x + 1 = 4(2x + 1) \iff x^2 - 10x - 3 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 100 + 12 = 112 = (4\sqrt{7})^2$, donc les solutions sont $x = 5 - 2\sqrt{7}$ et $x = 5 + 2\sqrt{7}$. Comme $5 - 2\sqrt{7} < 0$ (il est rejeté), et $5 + 2\sqrt{7} \geq 1$, on conclut :

$$S = \{5 + 2\sqrt{7}\}.$$

b) Ensemble des réels x vérifiant $k(x) \leq x \leq k^{-1}(x)$. Pour x tel que $k(x)$ existe, c'est-à-dire $x \geq 0$, posons $y = k^{-1}(x)$, de sorte que $k(y) = x$ et $y \geq 0$. Comme k est strictement croissante sur $[0; +\infty[$:

$$x \leq k^{-1}(x) \iff x = k(y) \text{ et } y \dots$$

Plus simplement : $x \leq y \iff k(x) \leq k(y) = x$. Donc la double inégalité équivaut à $x \geq 0$ et $k(x) \leq x$.

Résolvons $k(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, c'est-à-dire $x - 1 \leq 2\sqrt{2x + 1}$:

- Si $0 \leq x < 1$: le membre de gauche est strictement négatif, l'inégalité est vraie.
- Si $x \geq 1$: les deux membres sont positifs, on élève au carré et on obtient $x^2 - 10x - 3 \leq 0$, soit $x \in [5 - 2\sqrt{7}; 5 + 2\sqrt{7}]$. Avec $x \geq 1$, on obtient $x \in [1; 5 + 2\sqrt{7}]$.

En réunissant les deux cas, l'ensemble des solutions est :

$$[0; 5 + 2\sqrt{7}]$$

Solution Exercice 9

1/ Factorisons l'expression :

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x + 2y)(x - y).$$

On cherche donc les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(x + 2y)(x - y) = -5$. Posons $u = x + 2y$ et $v = x - y$; on a $uv = -5$ et $u - v = 3y$, donc $u - v$ doit être divisible par 3. Les couples (u, v) d'entiers tels que $uv = -5$ sont :

$$(1, -5), \quad (-1, 5), \quad (5, -1), \quad (-5, 1).$$

Pour chacun, $u - v \in \{6, -6, 6, -6\}$, divisible par 3, et l'on obtient $y = \frac{u - v}{3}$, $x = v + y$:

- $(u, v) = (1, -5) : y = 2, x = -3$;
- $(u, v) = (-1, 5) : y = -2, x = 3$;
- $(u, v) = (5, -1) : y = 2, x = 1$;
- $(u, v) = (-5, 1) : y = -2, x = -1$.

Vérification, par exemple pour $(1, 2) : 1 + 2 - 8 = -5$. Donc

$$A = \{(-3, 2), (3, -2), (1, 2), (-1, -2)\}.$$

2/ Pour $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ on a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{x + y - 1}{xy}.$$

a) Montrons que $0 \notin B$. Si $x, y \geq 1$, alors $x + y - 1 \geq 1$, donc $\frac{x + y - 1}{xy} \neq 0$. Ainsi $0 \notin B$.

Montrons que $\frac{1}{2} \in B$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\frac{x + y - 1}{xy} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $2(x + y - 1) = xy$, soit

$$(x - 2)(y - 2) = 2.$$

On prend $x - 2 = 1$ et $y - 2 = 2$, soit $(x, y) = (3, 4)$. Vérification : $\frac{3 + 4 - 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{1}{2} \in B$.

b) Montrons que $B \subset]0; 1]$. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$.

- Positivité : $x + y - 1 \geq 1 > 0$ et $xy > 0$, donc $\frac{x + y - 1}{xy} > 0$.
- Majoration :

$$1 - \frac{x + y - 1}{xy} = \frac{xy - x - y + 1}{xy} = \frac{(x - 1)(y - 1)}{xy} \geq 0,$$

car $x - 1 \geq 0$ et $y - 1 \geq 0$.

Ainsi $0 < \frac{x + y - 1}{xy} \leq 1$, c'est-à-dire $B \subset]0; 1]$.

3/ Supposons qu'il existe $x \in E \cap F$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \frac{2k'\pi}{5}.$$

En divisant par π puis en multipliant par 20 :

$$5 + 8k = 10 + 8k' \iff 8(k - k') = 5.$$

Or $8(k - k')$ est un entier divisible par 8, alors que 5 ne l'est pas : c'est impossible. Donc $E \cap F = \emptyset$.



4/ Déterminons d'abord I . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{6}{n} \in \mathbb{N}$ si et seulement si n divise 6. Donc

$$I = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Par ailleurs, $2x < 5 \iff x < \frac{5}{2}$, donc

$$J = \left] -\infty; \frac{5}{2} \right[.$$

- $I \cap J$: les éléments de I strictement inférieurs à $\frac{5}{2}$ sont 1 et 2. Donc

$$I \cap J = \{1, 2\}.$$

- $I \cup J$: 3 et 6 ne sont pas dans J (car $3, 6 \geq \frac{5}{2}$), donc

$$I \cup J = \left] -\infty; \frac{5}{2} \right[\cup \{3, 6\}.$$

✓ Solution Exercice 10

1/

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (5x + 3y, 3x + 5y) \end{aligned}$$

a) • **Injectivité.**

Soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{R}^2$ tels que $g(x, y) = g(x', y')$. On pose $s = x - x'$ et $t = y - y'$. On obtient le système :

$$\begin{cases} 5s + 3t = 0 \\ 3s + 5t = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on a $8(s + t) = 0$, donc $s + t = 0$. En soustrayant, on a $2(s - t) = 0$, donc $s - t = 0$. Ainsi $s = t = 0$, c'est-à-dire $(x, y) = (x', y')$. Donc g est injective.

- **Surjectivité.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x, y) = (a, b)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 5x + 3y = a \\ 3x + 5y = b \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut $25 - 9 = 16 \neq 0$, donc le système admet une unique solution :

$$x = \frac{5a - 3b}{16}, \quad y = \frac{5b - 3a}{16}.$$

Vérification :

$$5x + 3y = \frac{25a - 15b + 15b - 9a}{16} = a \quad \text{et} \quad 3x + 5y = \frac{15a - 9b + 25b - 15a}{16} = b.$$

. Donc g est surjective.

Ainsi g est bijective.

b) Expression de g^{-1} .

D'après la question précédente, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'unique antécédent de (a, b) par g est :

$$g^{-1}(a, b) = \left(\frac{5a - 3b}{16}, \frac{5b - 3a}{16} \right).$$

2/

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (p, q) &\longmapsto (2p + 1) 2^q \end{aligned}$$

- **Injectivité.** Soient (p, q) et (p', q') dans $\mathbb{N}^2$ tels que $f(p, q) = f(p', q')$, c'est-à-dire :

$$(2p + 1) 2^q = (2p' + 1) 2^{q'}.$$

Supposons que $q \leq q'$. En divisant par 2^q on obtient :

$$2p + 1 = (2p' + 1) 2^{q' - q}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $q' > q$, le membre de droite est pair alors que le membre de gauche est impair : c'est absurde. Donc $q = q'$, et alors $2p + 1 = 2p' + 1$, soit $p = p'$. Ainsi $(p, q) = (p', q')$ et f est injective.

- **Surjectivité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons q le plus grand entier tel que 2^q divise n (ce qui existe car $n \neq 0$). Alors $n = 2^q m$ avec m impair, donc $m = 2p + 1$ avec $p = \frac{m - 1}{2} \in \mathbb{N}$. Ainsi $n = f(p, q)$ et f est surjective.

Conclusion : f est injective et surjective, donc bijective.

3/

$$\begin{aligned} h : [1, +\infty[&\longrightarrow]0, \sqrt{3}] \\ x &\longmapsto \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} \end{aligned}$$

- **Bijektivité.**

Pour tout $x \geq 1$, on a $(x + 2) - (x - 1) = 3$, donc :

$$h(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = \frac{3}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1}}.$$

Le dénominateur est strictement croissant et strictement positif sur $[1, +\infty[$, donc h est strictement décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.

– Valeur en 1 : $h(1) = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$.

– Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1}} = 0$.

Par le théorème de la bijection (monotone et continue), h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, \sqrt{3}]$.

- **Expression de h^{-1} .**

Soit $y \in]0, \sqrt{3}]$. Cherchons $x \geq 1$ tel que $h(x) = y$. On a alors :

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = y \quad \text{donc} \quad \frac{3}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1}} = y.$$



Ainsi $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \frac{3}{y}$. En additionnant et soustrayant les deux relations :

$$\sqrt{x+2} = \frac{y^2+3}{2y}, \quad \sqrt{x-1} = \frac{3-y^2}{2y}.$$

En élevant $\sqrt{x+2}$ au carré :

$$x+2 = \frac{(y^2+3)^2}{4y^2} \implies x = \frac{(y^2+3)^2 - 8y^2}{4y^2} = \frac{y^4 - 2y^2 + 9}{4y^2}.$$

Ainsi :

$$h^{-1}(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 9}{4x^2} \quad \text{pour tout } x \in]0, \sqrt{3}].$$

- **Vérification.** Posons $\varphi(y) = \frac{y^4 - 2y^2 + 9}{4y^2}$ pour $y \in]0, \sqrt{3}]$.
 - $\varphi(y) - 1 = \frac{y^4 - 6y^2 + 9}{4y^2} = \frac{(y^2 - 3)^2}{4y^2} \geq 0$, donc $\varphi(y) \geq 1$: $\varphi(y)$ est bien dans l'intervalle de départ.
 - $\varphi(y) + 2 = \frac{(y^2 + 3)^2}{4y^2}$, donc $\sqrt{\varphi(y) + 2} = \frac{y^2 + 3}{2y}$.
 - $\varphi(y) - 1 = \frac{(y^2 - 3)^2}{4y^2}$, donc $\sqrt{\varphi(y) - 1} = \frac{3 - y^2}{2y}$ (car $3 - y^2 \geq 0$).
 - Ainsi $h(\varphi(y)) = \frac{y^2 + 3 - (3 - y^2)}{2y} = \frac{2y^2}{2y} = y$.

Ceci confirme que $h^{-1}(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 9}{4x^2}$ pour tout $x \in]0, \sqrt{3}]$.

Prendre le temps de chercher par soi-même