



Série 4

Limites et Continuité

2 BIOF PC et SVT



S. EL JAAFARI



I- Énoncés des exercices



Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{4-x}}{1-2\sqrt{x+2}}$

3) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2-4}}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{(2-x)^3} + 5$

5) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2-5x+2} + 2\sqrt[5]{9-x^2}$

6) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{2x-3}{x^2-4}}$

7) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^4-3x^2+1}}{\sqrt[3]{|x-2|}-2}$

8) $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt[6]{(x-1)^2}}$

9) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3-4}}{2x-3}$



Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $x^3 - 8 = 0$

b) $x^3 + 8 = 0$

c) $x^4 - 256 = 0$

d) $x^4 + 256 = 0$

e) $\sqrt[3]{x-2} = 1$

f) $\sqrt[3]{x-1} = -\sqrt{5}$

g) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$

h) $\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2} = 2$

i) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

j) $x\sqrt[3]{x} - 5 = 0$



Exercice 3

1/ Écrire avec un dénominateur entier : $A = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$, $B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$, $C = \frac{1}{\sqrt[3]{7} + 1}$.

2/ Comparer : $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[4]{5}$; $4^{\frac{1}{3}}$ et $7^{\frac{1}{5}}$; $3^{\frac{1}{4}}$ et $\sqrt[3]{5}$.



3/ Simplifier : $E = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times \sqrt[12]{16}}{\sqrt[5]{2}}, \quad F = \frac{(\sqrt[3]{8})^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}}.$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 5} - x$ | b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3} + x$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 5} - 2x$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{2x^4 + x} - 1 + 3x$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + x + 2} - \sqrt[3]{2x^3 + 1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{x} - 1}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 5}$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x}}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{2 - x^3}}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x + 6} - 2}{x - 2}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt{x + 1}}{x - 3}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x} - 2}$ |
| o) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x + 10} - 2}{x + 2}$ | p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{2 - \sqrt[3]{x + 8}}$ |
| q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2}$ | r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x + 1} - 1}{\sqrt[6]{x + 1} - 1}$ |
| s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} - x^{3/2}$ | t) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2\sqrt{x^3 - 2}}{\sqrt[3]{x^2 - 1} \times \sqrt{x^3 - 2} - 10}$ |

Exercice 5

On considère $f(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}.$

- 1/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x} = 0$.
b) En déduire D_f .
- 2/ a) Montrer que $(\forall x \in D_f) : f(x) = \frac{1}{\sqrt[12]{1+x} (1 + \sqrt[12]{1+x})}.$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
- 3/ Montrer que f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.



Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}; & x > 0 \\ \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}; & x \leq 0 \end{cases}$$

1/ Étudier la continuité de la fonction f en 0.

2/ Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty; 0]$.

a) Montrer que g est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que : $(\forall x \in J); g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right[$.

d) Dédurre que : $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}$.



Exercice 7

1. Calculer les valeurs des nombres suivants :

a) $A = \arctan(1)$

b) $B = \arctan(\sqrt{3})$

c) $C = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d) $D = \arctan\left(\tan\left(-\frac{41\pi}{4}\right)\right)$

e) $E = \arctan\left(\tan\left(\frac{71\pi}{3}\right)\right)$

f) $F = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

g) $G = \arctan\left(\tan\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

h) $H = \tan\left(\arctan\left(\frac{25}{6}\right)\right)$

i) $I = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

j) $J = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3})$

2. Montrer que :

a) $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $\arctan\left(\frac{24}{7}\right) = 2 \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

3. Calculer :

a) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \arctan(2)$



Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1/ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2/ \arctan(x) - \frac{\pi}{4} = 2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$3/ \arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

$$4/ \arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$$

$$5/ \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

$$6/ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$



Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x^2 - 2x + 5)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(2x^2 + 3x - 1)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{2x+1}{2x\sqrt{3}-5}\right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\sqrt{\frac{x-5}{x+7}}\right)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}x^2+x-1}{x^2+3}\right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{2x^2+x+5}{3-x}\right)$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x^2-2x+5}{x^3+x^2+x+1}\right)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3 \arctan x - \pi}{x - \sqrt{3}}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2+x)}{x}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\arctan(x^2)}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$



Exercice 10

Montrer que :

$$1/ \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$



$$2/ \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$3/ 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$4/ \arctan\left(\frac{24}{7}\right) = 2 \arctan\left(\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 11

Montrer que :

$$1/ \quad \mathbf{a)} (\forall x > 0) : \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{b)} (\forall x < 0) : \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$2/ (\forall x < 0) : \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

$$3/ \quad \mathbf{a)} (\forall x \in \mathbb{R}) : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\mathbf{b)} (\forall x \in \mathbb{R}) : \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 12

$$1/ \text{ Montrer que : } \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2/ \text{ En déduire que : } \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{5\pi}{4}$$

$$3/ \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation : } \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$$

Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\arctan x} - \sqrt[3]{\arctan x}$$

$$1/ \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

$$2/ \text{ Montrer que } g \text{ est continue et strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

$$3/ \text{ Montrer que l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}^{+*}.$$

$$4/ \text{ Vérifier que } 1 < \alpha < \sqrt{3} \text{ puis déterminer le signe de } g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}.$$



Exercice 14

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = x \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right)$$

1./ Montrer que h admet un prolongement par continuité en 0 , $\tilde{h}$ à déterminer.

2./ Montrer que h est paire.

3./ Montrer que : $(\forall x > 0) \quad h(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2} \arctan x$.

4./ On considère l'équation $(E) : \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}}{x} \right) = \frac{5\pi}{12}$.

a) Montrer que $(E) \iff x \in]0, +\infty[$ et $h(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12} \sqrt{x}$.

b) Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation (E) .



Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que la fonction f est impaire.

2/ Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.

3/ a) Montrer que la fonction $u : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

5/ a) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$.



Exercice 16

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $v(x) = \arctan(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

1/ Montrer que l'équation $v(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

2/ Vérifier que $1 < \alpha < 3\sqrt{3}$ et déterminer le signe de $v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3/ Montrer que $1 < \tan \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} \right) < \sqrt{3}$.



Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \arctan x$.

- 1/
 - a) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
- 2/
 - a) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$ et que $0 < x_n < 1$.
 - b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_{n+1} < x_n$.



Exercice 18

- 1/
 - a) Montrer que $(\forall (a; b) \in]-1; 1[^2) : \arctan a + \arctan b = \arctan \left(\frac{a+b}{1-ab} \right)$.
 - b) En déduire la valeur du nombre $S = 5 \arctan \left(\frac{1}{8} \right) + 2 \arctan \left(\frac{1}{18} \right) + 3 \arctan \left(\frac{1}{57} \right)$.
- 2/
 - a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
 - b) En déduire les solutions de l'équation $\arctan x + \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi}{4}$.



Exercice 19

- 1/ Montrer que $(\forall x \in]-1; +\infty[) : \arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
- 2/ En déduire la valeur de $\arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \arctan x$ pour tout $x \in]-\infty; -1[$.



Exercice 20

Soit p un entier naturel non nul.

- 1/ Montrer que : $\arctan \left(\frac{p}{p+1} \right) - \arctan \left(\frac{p-1}{p} \right) = \arctan \left(\frac{1}{2p^2} \right)$.
- 2/ Soit n un entier naturel non nul. Donner en fonction de n l'expression $S(n) = \sum_{p=1}^n \arctan \left(\frac{1}{2p^2} \right)$.
- 3/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$.



Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2$.

- 1/
 - a) Déterminer deux fonctions u et v telles que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = u \circ v(x)$.
 - b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.



- a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
 b) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II– Corrigés des exercices

✓ Solution Exercice 1

1) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Donc $D_f = [-1, +\infty[$.

2) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{4-x}}{1-2\sqrt{x+2}}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 1-2\sqrt{x+2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -2 \\ x \neq -\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

Donc : $D_f = \left[-2, -\frac{7}{4}\right[\cup \left[-\frac{7}{4}, 4\right]$.

3) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt[4]{x^2-4}}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow x^2-4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Donc $D_f =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

4) $f(x) = \sqrt[3]{(2-x)^3} + 5$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow (2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2]$.

D'où $D_f =]-\infty, 2]$.

5) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2-5x+2} + 2\sqrt[5]{9-x^2}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+2 \geq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty[\\ x \in [-3, 3] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{2}{3}\right] \cup [1, 3]$.

Donc $D_f = \left[-3, \frac{2}{3}\right] \cup [1, 3]$.

6) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{2x-3}{x^2-4}}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x^2-4} \geq 0 \\ \frac{2x-3}{x^2-4} \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3}{x^2-4} \geq 0 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$2x-3$	-		-	0	+
x^2-4	+	0	-		-
quotient	-		+	0	

Donc : $D_f = \left]-2, \frac{3}{2}\right] \cup]2, +\infty[$.

7) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^4-3x^2+1}}{\sqrt[3]{|x-2|-2}}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4-3x^2+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{|x-2|-2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (2x^2-1)(x^2-1) \geq 0 \\ |x-2| \neq 8 \end{cases}$



x	$-\infty$	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$	
$2x^2 - 1$		+		+	0	-	0	+		+
$x^2 - 1$		+	0	-		-		-	0	+
produit		+	0	-	0	+	0	-	0	+

Donc $x \in]-\infty, -6[\cup]-6, -1] \cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup [1, 10[\cup]10, +\infty[$.

D'où $D_f =]-\infty, -6[\cup]-6, -1] \cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup [1, 10[\cup]10, +\infty[$.

8) $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt[6]{(x-1)^2}}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1$.

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

9) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4}}{2x - 3}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4 \geq 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{4} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, \sqrt[3]{4}\right[\cup]\sqrt[3]{4}, +\infty[$.

D'où $D_f = \left[\frac{3}{2}, \sqrt[3]{4}\right[\cup]\sqrt[3]{4}, +\infty[$.

✓ Solution Exercise 2

a) $x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 2$. Donc $S = \{2\}$.

b) $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 = (-2)^3 \Rightarrow x = -2$. Donc $S = \{-2\}$.

c) $x^4 - 256 = 0, \Leftrightarrow x^4 = 256 = 4^4 \Rightarrow x = \pm 4$. Donc $S = \{-4, 4\}$.

d) $x^4 + 256 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -256 < 0$. Donc $S = \emptyset$.

e) $\sqrt[3]{x-2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \\ x \in [2, \infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow S = \{3\}$.

f) $\sqrt[3]{x-1} = -\sqrt{5}$ puisque $\sqrt[3]{x-1} < 0$ alors $S = \emptyset$.

g) $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$. le domaine de définition de cette équation est $[0, 1]$.

Alors $(\forall x \in [0, 1]), \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[6]{x} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

D'où : $S = \{\frac{1}{4}\}$.

h) Le domaine de définition de l'équation : $\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2} = 2$ est $[-2, +\infty[$.

Posons $t = \sqrt[3]{x+2}$, alors on a : $\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2} = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = -2$.

• $t = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2} = 1 \Rightarrow x = -1 \in [-2, +\infty[$

• $t = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2} = -2 \Rightarrow x+2 = -8 \Rightarrow x = -10 \notin [-2, +\infty[$.

Alors $S = \{-1\}$.

i) En posant $X = x^3 : x^6 - 3x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow X = 4$ ou $X = -1$.



- $X = 4 \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$
- $X = -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$.

Alors $S = \{-1, \sqrt[3]{4}\}$.

j) L'ensemble de définition de l'équation $x\sqrt[3]{x} - 5 = 0$ est $\mathbb{R}^+$. On a : $x\sqrt[3]{x} - 5 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x^4 = 125 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{125} \in \mathbb{R}^+$ ou $x = -\sqrt[4]{125} \notin \mathbb{R}^+$.

Alors : $S = \{\sqrt[4]{125}\}$

✓ Solution Exercice 3

1/ On utilise $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ et $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

- En posant : $a = \sqrt[3]{2}$, on a : $(a - 1)(a^2 + a + 1) = a^3 - 1 = 1$, donc $A = \sqrt[3]{2} - 1$.
- $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 3 - 2 = 1$, donc $B = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$.
- $(\sqrt[3]{7} + 1)(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1) = 7 + 1 = 8$, donc $C = \frac{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1}{8}$.

- 2/ • On a $\text{ppcm}(3, 4) = 12$, donc $\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{16}$ et $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$.
Comme $16 < 125$, alors $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{5}$
- On a $\text{ppcm}(3, 5) = 15$, donc $4^{1/3} = \sqrt[15]{1024}$ et $7^{1/5} = \sqrt[15]{343}$.
Comme $343 < 1024$, alors : $7^{1/5} < 4^{1/3}$
- On a $\text{ppcm}(4, 3) = 12$ Donc $3^{1/4} = \sqrt[12]{27}$ et $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{625}$.
Comme $27 < 625$, alors : $3^{1/4} < \sqrt[3]{5}$

- 3/ • $E = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times \sqrt[12]{16}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2^{1/6} \cdot 2^{4/12}}{2^{1/5}} = 2^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{8}$.
- $F = \frac{(\sqrt[3]{8})^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\sqrt[4]{32}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} = \frac{2^{1/2} \cdot 2^{5/4}}{2^{1/2} \cdot 2^{6/12}} = 2^{\frac{7}{4} - 1} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}$.

✓ Solution Exercice 4

Pour les formes $\frac{0}{0}$ du type $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$, on utilise le nombre dérivé $g'(a)$.

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 5} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{(x^3 + 5)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 5} + x^2} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 5} - x = 0$$

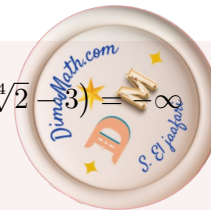
$$2/ \text{ Pour } x < 0, x = -|x| : \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3} - |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{A^3 + A^2|x| + A|x|^2 + |x|^3} = 0 \text{ (où } A = \sqrt[4]{x^4 + 3}).$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{x^4 + 3} - |x| = 0$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 5} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + 5/x^3} - 2 \right) = +\infty \times (-1) = -\infty,$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + 5/x^3} - 2 = -1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 5} - 2x = -\infty$$



$$4/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{2x^4 + x - 1} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \rightarrow -\infty - x \left(\sqrt[4]{2 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}} - 3 \right) = +\infty \times (\sqrt[4]{2} - 3) = -\infty$$

car $\sqrt[4]{2} - 3 < 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{2x^4 + x - 1} + 3x = -\infty$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + x + 1} - \sqrt[3]{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}} - \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x^3}} \right) = +\infty \times (1 - \sqrt[3]{2}) = -\infty.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + x + 1} - \sqrt[3]{2x^3 + 1} = -\infty$

$$6/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \times \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1 \times +\infty = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$

$$7/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x + 1} - x \right) - \left(\sqrt{x^2 + 5} - x \right) = 0, \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x + 1} - x \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x \right) = 0.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 5} = 0$

$$8/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt[3]{1 - 1/x^2}}{x \sqrt{1 + 1/x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - 1/x^2}}{\sqrt{1 + 1/x}} = 1.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x}} = 1$

$$9/ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{2 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{-x \sqrt[3]{\frac{-2}{x^3} + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{-2}{x^3} + 1}} = 1.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt[3]{2 - x^3}} = 1.$

$$10/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{3}$

11/ Posons $g(x) = \sqrt[3]{x+6}$, la fonction g est définie et dérivable au voisinage de 2, et on a : $g'(x) = \frac{1}{3}(x+6)^{-2/3}$, par conséquent $g'(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Comme g est dérivable en 2, alors $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x - 2} = g'(2) = \frac{1}{12}.$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x - 2} = \frac{1}{12}.$

$$12/ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt{x+1}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x-3} - \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt{x+1}}{x-3} = -\frac{1}{6}$



$$13/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} = \frac{5}{6}$$

$$14/ \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} + 2 = 4, \text{ car } \sqrt[3]{x^2} - 4 = (\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x} + 2).$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x} - 2} = 4.$$

$$15/ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x+10} - 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+10})^2 + 2\sqrt[3]{x+10} + 4} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x+10} - 2}{x+2} = \frac{1}{12}.$$

$$16/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+8}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{x}{2 - \sqrt[3]{x+8}} = \frac{1}{2} \times (-12) = -6.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+8}} = -6$$

$$17/ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1 + \sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{1 + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2} = \frac{4}{9}$$

$$18/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{\sqrt[6]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} \times \frac{x}{\sqrt[6]{x+1} - 1} = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{\sqrt[6]{x+1} - 1} = \frac{3}{2}$$

$$19/ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} - x^{3/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (x^{-5/6} - 1) = +\infty \times (-1) = -\infty.$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} - x^{3/2} = -\infty$$

$$20/ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5\sqrt[3]{x^2-1} - 2\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^2-1} \times \sqrt{x^3-2} - 10}$$

Posons $a = \sqrt[3]{x^2-1}$ et $b = \sqrt{x^3-2}$. Lorsque $x \rightarrow 3$:

$$a \rightarrow \sqrt[3]{8} = 2, \quad b \rightarrow \sqrt{25} = 5.$$

Numérateur et dénominateur tendent vers 0 : c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

► On a :

$$5a - 2b = 5(a - 2) - 2(b - 5),$$

$$ab - 10 = b(a - 2) + 2(b - 5).$$



Pour $a - 2$. En utilisant l'identité $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, on a

$$a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4).$$

Comme $a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 \neq 0$, et $a^3 = x^2 - 1$, alors :

$$a - 2 = \frac{a^3 - 8}{a^2 + 2a + 4} = \frac{x^2 - 9}{a^2 + 2a + 4} = (x - 3) \frac{x + 3}{a^2 + 2a + 4}.$$

Pour $b - 5$. Avec la quantité conjuguée, sachant que $b^2 = x^3 - 2$:

$$b - 5 = \frac{b^2 - 25}{b + 5} = \frac{x^3 - 27}{b + 5} = (x - 3) \frac{x^2 + 3x + 9}{b + 5}.$$

► Posons

$$P(x) = \frac{a - 2}{x - 3} = \frac{x + 3}{a^2 + 2a + 4}, \quad Q(x) = \frac{b - 5}{x - 3} = \frac{x^2 + 3x + 9}{b + 5}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par $x - 3$ (avec $x \neq 3$) :

$$\frac{5a - 2b}{ab - 10} = \frac{5P(x) - 2Q(x)}{bP(x) + 2Q(x)}.$$

► Comme

$$\lim_{x \rightarrow 3} P(x) = \frac{6}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} Q(x) = \frac{27}{10}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} b = 5.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5P(x) - 2Q(x)}{bP(x) + 2Q(x)} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{27}{10}}{5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{27}{10}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{27}{5}}{\frac{5}{2} + \frac{27}{5}} = \frac{-\frac{29}{10}}{\frac{79}{10}}.$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2\sqrt{x^3 - 2}}{\sqrt[3]{x^2 - 1} \times \sqrt{x^3 - 2} - 10} = -\frac{29}{79}$$

✓ Solution Exercice 5

1/ a) L'ensemble de définition de l'équation est $[-1, +\infty[$. Posons $t = \sqrt[12]{1+x}$;

alors $\sqrt[3]{1+x} = t^4$ et $\sqrt{1+x} = t^6$. Donc

$$t^4 - t^6 = t^4(1 - t)(1 + t) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \iff x = -1 \\ \text{ou} \\ t = 1 \iff x = 0 \end{cases}.$$

D'où : $S = \{-1, 0\}$.

b) $x \in D_f \iff x \geq -1$ et $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x} \neq 0 \iff x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

Donc $D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

2/ a) Pour $x \in D_f$, avec $t = \sqrt[12]{1+x}$ (et $\sqrt[4]{1+x} = t^3$) :

$$f(x) = \frac{t^3 - t^4}{t^4 - t^6} = \frac{t^3(1 - t)}{t^4(1 - t)(1 + t)} = \frac{1}{t(1 + t)}$$



Donc :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[12]{1+x} (1 + \sqrt[12]{1+x})}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t(1+t)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t(1+t)} = +\infty$$

3/ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{2}$. La limite est finie, donc f admet un prolongement par continuité

$$\text{en } 0 \text{ défini par } \begin{cases} g(x) = f(x) & ; \quad x \in D_f \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

✓ Solution Exercise 6

1/ On a $f(0) = \frac{0+2}{0+1} = 2$.

À gauche de 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+2}{2x^2+1} = 2 = f(0)$.

À droite de 0 : pour $x > 0$, en utilisant les identités suivantes $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$ et $b^2 - 1 = (b-1)(b+1)$, on a :

$$\sqrt[3]{3x+1} - 1 = \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1} \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1} = \frac{3 \times 2}{1+1+1} = 2 = f(0).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, la fonction f est continue en 0.

2/ Pour $x \leq 0$, $g(x) = \frac{x^2+2}{2x^2+1}$.

a) g est continue sur I (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). Elle est dérivable sur I et

$$g'(x) = \frac{2x(2x^2+1) - 4x(x^2+2)}{(2x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(2x^2+1)^2}.$$

Pour $x < 0$, $g'(x) > 0$: g est strictement croissante sur I . Étant continue et strictement monotone, g réalise une bijection de I vers

$$J = g(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); g(0) \right] = \left] \frac{1}{2}; 2 \right],$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$ et $g(0) = 2$.

b) Soit $y \in J$ et $x \in I$. Alors

$$g(x) = y \iff x^2 + 2 = y(2x^2 + 1) \iff x^2(2y - 1) = 2 - y \iff x^2 = \frac{2-y}{2y-1}.$$



Comme $x \leq 0$, on obtient $x = -\sqrt{\frac{2-y}{2y-1}}$. Donc

$$(\forall x \in J) ; g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}.$$

c) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ donc elle est continue et strictement décroissante en particulier sur $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right]$ et

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{4}{9} + 2}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{22}{17} \approx 1,29 < \sqrt{2}, \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{3}{2} = 1,5 > \sqrt{2}.$$

Donc $\sqrt{2} \in]g(-\frac{2}{3}); g(-\frac{1}{2})[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou Théorème de la bijection), l'équation $g(x) = \sqrt{2}$ admet une unique solution $\alpha \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right]$.

d) On a $\sqrt{2} \in J$ et $g(\alpha) = \sqrt{2}$, donc

$$\alpha = g^{-1}(\sqrt{2}) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}.$$

Or $-\frac{2}{3} < \alpha < -\frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2} < -\alpha < \frac{2}{3}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{2}{3}.$$

✓ Solution Exercice 7

Rappel : $\arctan(\tan \theta) = \theta$ si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, et $\tan(\arctan t) = t$ pour tout réel t . De plus, pour $a, b > 0$ avec $ab < 1$: $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$.

1/ • $A = \arctan(1) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{4}$.

• $B = \arctan(\sqrt{3}) \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3}$

• $C = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{6}$.

• $-\frac{41\pi}{4} = -10\pi - \frac{\pi}{4}$, donc $\tan\left(-\frac{41\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Donc $D = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.

• $\frac{71\pi}{3} = 24\pi - \frac{\pi}{3}$, donc $E = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$.

• Puisque $\frac{\pi}{7} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc $F = \frac{\pi}{7}$.

• $-\frac{13\pi}{12} = -\pi - \frac{\pi}{12}$, donc $G = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$. Alors $G = -\frac{\pi}{12}$

• $H = \frac{25\pi}{6}$.



- Puisque $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} < 1$, alors $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}} = \arctan \frac{7}{9}$ et puisque $\frac{7}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{72} < 1$, alors : $\arctan \frac{7}{9} + \arctan \frac{1}{8} = \arctan \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{72}} = \arctan \frac{65/72}{65/72} = \arctan 1$.

Donc $I = \frac{\pi}{4}$.

- Pour $\arctan 2 + \arctan 3$, on a : $\tan(\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{2+3}{1-6} = -1$, et puisque la somme appartient à $] \frac{\pi}{2}; \pi[$ (car $\arctan 2 > \frac{\pi}{4}$ et $\arctan 3 > \frac{\pi}{4}$), donc $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$. On montre facilement que $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ donc $\arctan(2 + \sqrt{3}) = \frac{5\pi}{12}$. Ainsi

$$J = \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}.$$

D'où : $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3}) = \frac{7\pi}{6}$

- 2/ a) Posons $\theta = \arctan \frac{1}{2} \in]0; \frac{\pi}{4}[$. Alors $2\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc $2\theta = \arctan \frac{4}{3}$. D'où : $\arctan \left(\frac{4}{3} \right) = 2 \arctan \left(\frac{1}{2} \right)$

- b) Posons $\varphi = \arctan \frac{3}{4} \in]0; \frac{\pi}{4}[$. Alors $2\varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{3/2}{7/16} = \frac{24}{7}.$$

Donc $2\varphi = \arctan \frac{24}{7}$. D'où : $\arctan \left(\frac{24}{7} \right) = 2 \arctan \left(\frac{3}{4} \right)$

- 3/ a) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < 1$, donc

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{2}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \arctan \frac{7/6}{2/3} = \arctan \frac{7}{4}.$$

- b) Soit $\delta = \arctan \frac{4}{3} - \arctan 2 \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ (car $\frac{4}{3} < 2$). Alors

$$\tan \delta = \frac{\frac{4}{3} - 2}{1 + \frac{8}{3}} = \frac{-2/3}{11/3} = -\frac{2}{11},$$

donc $\delta = -\arctan \frac{2}{11}$. D'où : $\arctan \left(\frac{4}{3} \right) - \arctan(2) = \arctan \left(-\frac{2}{11} \right)$.

✓ Solution Exercice 8

- 1/ Résolvons l'équation : $\arctan x + \arctan \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4}$. Discutons selon le signe de x :



• Si $x \leq 0$, alors $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{3x}{2}\right) \leq 0 < \frac{\pi}{4}$: Donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^-$.

• Si $x > 0$, la somme est dans $]0; \pi[$ et, si elle vaut $\frac{\pi}{4}$, on a $\frac{x + \frac{3x}{2}}{1 - \frac{3x^2}{2}} = 1$, soit $3x^2 + 5x - 2 = 0$,
d'où $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -2$. Comme $x > 0$ alors : $x = \frac{1}{3}$ donc :

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

2/ L'équation s'écrit : $\arctan x = \frac{\pi}{4} + 2 \arctan \frac{1}{4}$. Or $\tan\left(2 \arctan \frac{1}{4}\right) = \frac{1/2}{1 - 1/16} = \frac{8}{15}$, et $2 \arctan \frac{1}{4} \in]0; \frac{\pi}{4}[$, donc $2 \arctan \frac{1}{4} = \arctan \frac{8}{15}$. Le second membre appartient à $] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$, donc l'équation a une solution unique :

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan \frac{8}{15}\right) = \frac{1 + \frac{8}{15}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{23}{7}, \quad S = \left\{ \frac{23}{7} \right\}.$$

3/ Même raisonnement qu'en 1/ : pas de solution si $x \leq 0$. Pour $x > 0$, on doit avoir $\frac{3x}{1 - 2x^2} = 1$,
soit $2x^2 + 3x - 1 = 0$, d'où $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$. Seule la racine positive convient (et $2x^2 < 1$ pour elle) :

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \right\}.$$

4/ La fonction $h : x \mapsto \arctan x + \arctan(x\sqrt{3})$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $h(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$. Donc 1 est l'unique solution :

$$S = \{1\}.$$

(Par le calcul : $x > 0$ et $\frac{(1 + \sqrt{3})x}{1 - \sqrt{3}x^2} = \tan \frac{7\pi}{12} = -(2 + \sqrt{3})$ donne $(3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + \sqrt{3})x - (2 + \sqrt{3}) = 0$, de discriminant $(5 + 3\sqrt{3})^2$, dont la seule racine positive est 1.)

5/ Soit $\varphi(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1)$: φ est strictement croissante et $\varphi(0) = 0 < \frac{\pi}{2}$, donc toute solution est > 0 . Il y a donc au plus une solution.

Pour $x > 0$: $\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} \in]0; \frac{\pi}{2}[$. En prenant la tangente (avec $x^2 \neq 2$) :

$$\frac{2x}{1 - (x^2 - 1)} = \frac{1}{x} \iff 2x^2 = 2 - x^2 \iff x^2 = \frac{2}{3} \iff x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Réciproquement, pour $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 = -\frac{1}{3} < 1$, donc $\arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \arctan \frac{2x}{2 - x^2} = \arctan \frac{3x}{2} = \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ (car $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{3x}{2}$). Ainsi

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}.$$



6/ Domaine : $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. On rappelle que $\arctan x - \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$ et $\tan\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{x-1}{x+1}$. Donc

$$\arctan \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \arctan x - \frac{\pi}{4} & \text{si } x > -1, \\ \arctan x + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x < -1, \end{cases} \quad \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Si $x > 0$: la somme vaut $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: toujours vrai.
- Si $-1 < x < 0$: la somme vaut $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}$: aucune solution.
- Si $x < -1$: la somme vaut $-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: toujours vrai.

$$S =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

✓ Solution Exercice 9

On utilise la continuité de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 5 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x^2 - 2x + 5) = \frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 3x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(2x^2 + 3x - 1) = \frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{2-x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x+3}{2-x}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{3}x-5} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{3}x-5}\right) = \frac{\pi}{6}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{x+7} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-5}{x+7}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \sqrt{\frac{x-5}{x+7}} = \frac{\pi}{4}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x^2 + x - 1}{x^2 + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{\sqrt{3}x^2 + x - 1}{x^2 + 3} = \frac{\pi}{3}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 5}{3-x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{2x^2 + x + 5}{3-x} \sim \frac{2x^2}{-x} = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1} = 0$.
- Comme $3 \arctan \sqrt{3} = \pi$:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{3 \arctan x - \pi}{x - \sqrt{3}} = 3 \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\arctan x - \arctan \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} = 3 \arctan'(\sqrt{3}) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}.$$



- m) Pour $x \neq 0$: $\frac{\arctan(x^2 + x)}{x} = \frac{\arctan(x^2 + x)}{x^2 + x} \times (x + 1)$. Quand $x \rightarrow 0$, $u = x^2 + x \rightarrow 0$ et $\frac{\arctan u}{u} \rightarrow 1$ (d/), donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + x)}{x^2 + x} = 1$.
- n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\arctan(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{x^2}{\arctan(x^2)} \times \frac{\sqrt{x}}{x^2} = 1 \times 1 \times +\infty = +\infty$
- o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{\arctan(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}} = +\infty \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arctan t}{t} = +\infty \times 1 = +\infty$.

✓ Solution Exercise 10

1/ On sait que si $x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$ on a : $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.

Posons $A = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$, donc $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{3}$, et $\tan A = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (1/3)^2} = \frac{2/3}{8/9} = \frac{3}{4}$. Alors :

$$\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + A = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4+21}{28}}{\frac{28-3}{28}} = \frac{25}{25} = 1$$

Puisque $\arctan\left(\frac{1}{7}\right) \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et $\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \in]0, \frac{\pi}{4}[$, alors $\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + A \in]0, \frac{\pi}{2}[$. on conclut que : $\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2/ En utilisant la formule de duplication $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ avec $a = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$: on a :

$$\tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - (1/2)^2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

Puisque $2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit directement que

$$2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

3/ Posons $A = 2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$, donc $\tan A = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12}$ et $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 2A$. Donc

$$\tan(2A) = \frac{2 \times 5/12}{1 - (5/12)^2} = \frac{10/12}{119/144} = \frac{10 \times 12}{119} = \frac{120}{119}$$



En utilisant la formule : $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 - (\tan a)(\tan b)}$ on a :

$$\begin{aligned} \tan \left(4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) - \arctan \left(\frac{1}{239} \right) \right) &= \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} \\ &= \frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120} \\ &= \frac{28560 - 119}{28441 + 120} \\ &= \frac{28441}{28441} = 1 \end{aligned}$$

Puisque $\arctan \left(\frac{1}{5} \right) \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$ et $\tan \left(2 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) \right) = \frac{5}{12}$, alors $A \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$, par conséquent $2A - \arctan \left(\frac{1}{239} \right) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ D'où :

$$4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) - \arctan \left(\frac{1}{239} \right) = \frac{\pi}{4}$$

4/ Posons $\alpha = \arctan \left(\frac{3}{4} \right)$. Alors :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2} = \frac{3/2}{7/16} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

Or $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$, donc $2\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Par conséquent :

$$2 \arctan \left(\frac{3}{4} \right) = \arctan \left(\frac{24}{7} \right)$$

✓ Solution Exercise 11

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc la fonction f est constante sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

a) Pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Donc :

$$(\forall x > 0), \arctan x + \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$



b) Pour $x < 0$, $f(x) = f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. d'où :

$$(\forall x < 0), \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

2/ On utilise la formule $\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$ (lorsque $ab > -1$).

Soit $x < 0$, on a $x^2 + x + 1 > 0$ donc $x(x+1) > -1$, par conséquent $\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{x+1-x}{1+(x+1)x}\right)$. Donc :

$$(\forall x < 0) : \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

3/ Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $\theta = \arctan x$, donc $x = \tan \theta$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) On sait que $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, soit $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, d'où $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+x^2}$. Comme $\cos \theta > 0$, on obtient directement :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) De plus, $\sin(\arctan x) = \tan \theta \times \cos \theta = x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. D'où :

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

✓ Solution Exercice 12

1/ voir exercice 7.

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2/ D'après la question 1 et la relation d'Euler/complémentarité établie à l'exercice 11 ($\arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$), on a :

$$\forall t > 0, \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

En appliquant ceci pour $t = 2, 5, 8$ dans l'égalité précédente :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 5\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 8\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} - (\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8) = \frac{\pi}{4} \implies \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Donc :

$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{5\pi}{4}$$

3/ Considérons l'équation $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$. Considérons la fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3)$.

Pour tout réel x , on a : $f'(x) = \frac{1}{1+(x-3)^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x+3)^2}$. Donc Pour tout réel x , $f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$, alors d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = \frac{5\pi}{4}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Or $f(5) = \frac{5\pi}{4}$ d'après la question 2/. d'où la seule solution de l'équation $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$ est 5. Par conséquent :

$$S = \{5\}$$

✓ Solution Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x) = \frac{1}{\arctan x} - \sqrt[3]{\arctan x}$.

1/ Calcul des limites :

- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan x = 0^+$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\arctan x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\arctan x} = 0^+$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{\pi} - \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$$

2/ Continuité et monotonie :

La fonction g est la composée de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Comme la fonction $x \mapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $(\arctan x)' \neq 0$ alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. Et pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = -\frac{\frac{1}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} - \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{1+x^2}}{(\arctan x)^{2/3}} = -\frac{1}{1+x^2} \left[\frac{1}{(\arctan x)^2} + \frac{1}{3(\arctan x)^{2/3}} \right]$$

Pour tout $x > 0$, $1+x^2 > 0$ et $\arctan x > 0$, donc $g'(x) < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

- 3/ a) g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers l'intervalle image $]\frac{2}{\pi} - \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}, +\infty[$. Puisque 0 appartient à cet intervalle image (car $\frac{2}{\pi} < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$), d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^{*+}$.

- b) Évaluons g en 1 et en $\sqrt{3}$:



$$\bullet g(1) = \frac{1}{\pi/4} - \sqrt[3]{\pi/4} = \frac{4}{\pi} - \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \approx 1.27 - 0.79 > 0.$$

$$\bullet g(\sqrt{3}) = \frac{1}{\pi/3} - \sqrt[3]{\pi/3} = \frac{3}{\pi} - \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}} \approx 0.95 - 0.99 < 0 \text{ (plus précisément, } \frac{3}{\pi} < 1 \text{ et } \sqrt[3]{\pi/3} \approx 1).$$

Puisque $g(1) > 0$ et $g(\sqrt{3}) < 0$ et que g est strictement décroissante, on en déduit que $1 < \alpha < \sqrt{3}$. Par conséquent, $g(x) > 0$ pour $x \in]0, \alpha[$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha, +\infty[$.

Tableau de signe de g sur $]0, +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

✓ Solution Exercise 14

1. Prolongement par continuité en 0 :

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) = \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0. \text{ D'où : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

Alors la fonction h admet un prolongement par continuité en 0 notée $\tilde{h}$ défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \tilde{h}(0) = 0 \\ \tilde{h}(x) = h(x) \quad ; \quad x \neq 0 \end{cases}$$

2. Parité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en utilisant l'impairité de $\arctan(-u) = -\arctan u$, On a :

$$h(-x) = -x \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + (-x)^2}}{-x} \right) = -x \left(-\arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) \right) = h(x)$$

La fonction h est donc paire.

3. Expression simplifiée : Soit $x > 0$. Posons $x = \tan t$ avec $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a alors $\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\cos t}$. L'argument de la fonction arctan devient :

$$\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} = \frac{1 + \frac{1}{\cos t}}{\sin t} = \frac{1 + \cos t}{\sin t}$$

En utilisant les formules de trigonométrie ($1 + \cos t = 2 \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right)$ et $\sin t = 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right)$) :

$$\frac{1 + \cos t}{\sin t} = \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} = \cot \left(\frac{t}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

Puisque $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, donc :

$$\arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$$



En revenant à $h(x)$ et sachant que $t = \arctan x$:

$$h(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arctan x}{2} \right) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2} \arctan x \quad (\forall x > 0)$$

4. Équation (E) : Soit $x > 0$, on considère l'équation

$$(E) : \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}}{x} \right) = \frac{5\pi}{12}$$

a) L'équation (E) est définie pour $x > 0$. $(E) \iff \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}}{x} \right) = \frac{5\pi}{12} \iff$
 $\arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{5\pi}{12} \iff \sqrt{x} \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{5\pi}{12} \sqrt{x} \iff$
 $h(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12} \sqrt{x}$. D'où :

$$(E) \iff h(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12} \sqrt{x}$$

b) Posons $y = \sqrt{x}$ (donc $y > 0$). L'équation devient $h(y) = \frac{5\pi}{12}y$. En utilisant l'expression démontrée à la question 3 :

$$(E) \iff \frac{\pi}{2}y - \frac{y}{2} \arctan y = \frac{5\pi}{12}y$$

Puisque $y > 0$, on peut simplifier par y :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan y = \frac{5\pi}{12} \implies \frac{1}{2} \arctan y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\implies \arctan y = \frac{\pi}{6} \implies y = \tan \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Puisque $x = y^2$, on obtient :

$$x = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc :

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

✓ Solution Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$. Posons $u(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ sur $\mathbb{R}$, qui vaut 0 en 0.
 Alors $f = \arctan \circ u$ sur $\mathbb{R}$.



1/ La fonction u est impaire, donc $f(-x) = \arctan(u(-x)) = \arctan(-u(x)) = -f(x)$: f est impaire.

2/ $|u(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}+1} \leq |x|$, donc $u(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Par continuité de $\arctan$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

3/ a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $u'(x) = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)} > 0$. Donc u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$).

b) Comme $\arctan$ est strictement croissante et u strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f = \arctan \circ u$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$; et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -1 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$. Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.

5/ a) Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a $\sqrt{1+\tan^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$ (car $\cos \theta > 0$), donc

$$u(\tan \theta) = \frac{\frac{1}{\cos \theta} - 1}{\tan \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Soit $x \in J$ et posons $y = \tan(2x)$ (possible car $2x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$). Alors $f(y) = \arctan(\tan x) = x$, car $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Donc $f^{-1}(x) = \tan(2x)$ pour tout $x \in J$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f(y) \in J$. D'après la question précédente, $y = f^{-1}(x) = \tan(2x) = \tan(2f(y))$. Comme $2f(y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on obtient $2f(y) = \arctan y$, soit $f(y) = \frac{1}{2} \arctan y$. D'où :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$$

✓ Solution Exercice 16

Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $v(x) = \arctan \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

1/ v est la composée de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $v'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2(1+(\sqrt[3]{x})^2)} + \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^4}$. Donc pour tout $x > 0$: $v'(x) > 0$, par conséquent la fonction v est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ or $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \frac{\pi}{2}$ donc $0 \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[$ alors d'après le corollaire du TVI, l'équation $v(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

2/ On a $v(1) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$, donc $\alpha > 1$. Et $v(3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, donc $\alpha < 3\sqrt{3}$. Ainsi $1 < \alpha < 3\sqrt{3}$. Puisque la fonction v est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $v(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$, $v(\alpha) = 0$, et $v(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

Tableau de signe de $v(x)$:



x	0	α	$+\infty$
$v(x)$		-	+

3/ Comme $v(\alpha) = 0$, donc $\arctan(\sqrt[3]{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$. Donc $\tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) = \tan(\arctan \sqrt[3]{\alpha}) = \sqrt[3]{\alpha}$.

Puisque $1 < \alpha < 3\sqrt{3}$ donc $1 < \sqrt[3]{\alpha} < \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. D'où $1 < \tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) < \sqrt{3}$.

✓ Solution Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \arctan x$.

- 1/ a) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables, et $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$, d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- b) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = \mathbb{R}$.
- 2/ a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
- Puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$ et $0 < \frac{1}{n} < 1 + \frac{\pi}{4}$, donc $f(0) < f(x_n) < f(1)$ (Par stricte croissance de f) alors $0 < x_n < 1$.
- b) On a $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = f(x_n)$. Comme f est strictement croissante, donc $x_{n+1} < x_n$.

✓ Solution Exercice 18

- 1/ a) Pour $a, b \in]-1; 1[$, on a $|ab| < 1$, donc $1 - ab > 0$. Les réels $\arctan a$ et $\arctan b$ appartiennent à $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$, donc leur somme appartient à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Comme $\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}$ donc :
- $$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$
- b) On a : $S = 2\left(\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{18}\right) + 3\left(\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{57}\right)$ Calculons par la formule précédente :
- $\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{57} = \arctan\left(\frac{\frac{65}{456}}{\frac{455}{456}}\right) = \arctan \frac{1}{7}$;
 - $\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{18} = \arctan\left(\frac{\frac{13}{72}}{\frac{143}{144}}\right) = \arctan \frac{2}{11}$;



$$\bullet \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{2}{11} = \arctan \left(\frac{\frac{25}{77}}{\frac{75}{77}} \right) = \arctan \frac{1}{3};$$

$$\bullet 2 \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{3}{4} \text{ (car } \tan(2 \arctan \frac{1}{3}) = \frac{2/3}{1-1/9} = \frac{3}{4} \text{ et } 2 \arctan \frac{1}{3} \in]0; \frac{\pi}{2}[);$$

$$\bullet \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{\frac{25}{28}}{\frac{28}{28}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Or $S = 3 \left(\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{57} \right) + 2 \left(\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{18} \right) = 3 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{2}{11}$,
donc

$$S = 2 \left(\arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{2}{11} \right) + \arctan \frac{1}{7} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

2/ a) Soit $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$. Alors $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ a un discriminant $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, donc $g'(x) > 0$ par conséquent g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = 2 > 0$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

b) Soit $x > 0$ (pour $x = 0$, le membre de gauche vaut $0 \neq \frac{\pi}{4}$). On a $\arctan x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{\pi}{4} - \arctan x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$. $\arctan x + \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} \iff \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} - \arctan x \iff \sqrt{x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \arctan x \right) = \frac{1-x}{1+x}$. Posons $t = \sqrt{x} > 0$: on obtient $\sqrt{x} = \frac{1-x}{1+x} \iff t(1+t^2) = 1-t^2 \iff t^3 + t^2 + t - 1 = 0$. D'après la question 2/a) cette équation admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$. Donc l'équation $\arctan x + \arctan \sqrt{x} = \frac{\pi}{4}$ admet l'unique solution $x = \alpha^2$. D'où $S = \{\alpha\}$.

✓ Solution Exercise 19

1/ Soit $x > -1$, posons $\theta = \arctan x$ donc $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On a $\tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{1-x}{1+x}$.

Comme $x > -1$ on a $\theta > -\frac{\pi}{4}$, donc $\frac{\pi}{4} - \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $\arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{\pi}{4} - \theta$, d'où :

$$\arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{\pi}{4} - \arctan x$$

2/ Pour $x < -1$, on a $\theta = \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[$, donc $\varphi = \frac{\pi}{4} - \theta \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}[$. Comme $\tan \varphi = \frac{1-x}{1+x}$

et que $\varphi - \pi \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[\subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on a $\arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \varphi - \pi = -\frac{3\pi}{4} - \arctan x$. Donc

$$\arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \arctan x = -\frac{3\pi}{4}.$$

✓ Solution Exercise 20

1/ Posons $a = \frac{p}{p+1}$ et $b = \frac{p-1}{p}$, deux réels positifs. Donc $0 \leq \arctan a < \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \arctan b <$



$\frac{\pi}{2} \geq$. Alors $-\frac{\pi}{2} < \arctan a - \arctan b < \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{a - b}{1 + ab}.$$

Or $a - b = \frac{p^2 - (p^2 - 1)}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}$ et $1 + ab = 1 + \frac{p-1}{p+1} = \frac{2p}{p+1}$, donc $\frac{a-b}{1+ab} = \frac{1}{2p^2}$.

D'où :

$$\arctan\left(\frac{p}{p+1}\right) - \arctan\left(\frac{p-1}{p}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2p^2}\right)$$

2/ En utilisant la question 1, la somme est télescopique :

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{p=1}^n \left[\arctan\left(\frac{p}{p+1}\right) - \arctan\left(\frac{p-1}{p}\right) \right] \\ &= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

3/ Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \frac{\pi}{4}$$

✓ Solution Exercice 21

1/ a) Posons $v(x) = \sqrt[3]{x}$ (de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$) et $u(y) = y^2 - 2y + 2$. Alors $u \circ v(x) = (\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2 = f(x)$.

b) v est strictement croissante. $u(y) = (y-1)^2 + 1$ est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Or $v(x) \leq 1 \iff x \leq 1$. Donc f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (minimum atteint en $x = 1$, avec $f(1) = 1$).

2/ a) g est continue et strictement croissante sur $I = [1; +\infty[$, donc bijective de I sur $J = [g(1); +\infty[= [1; +\infty[$, car $g(1) = 1$ et $g(x) \rightarrow +\infty$.

b) Soit $x \in J$ et $y \geq 1$ tel que $g(y) = x$. Posons $s = \sqrt[3]{y} \geq 1$. Alors $(s-1)^2 + 1 = x$, donc $s-1 = \sqrt{x-1}$ (car $s-1 \geq 0$). Ainsi $s = 1 + \sqrt{x-1}$ et

$$g^{-1}(x) = y = s^3 = (1 + \sqrt{x-1})^3 \quad \text{pour tout } x \in [1; +\infty[.$$