Série 2
Les puissances

3 APIC — S. EL JAAFARI

I– Énoncés des exercices

Exercice 1

Écris sous forme d'une puissance d'un nombre :

a) $A = 5^6 \times 5^{-4}$

b) $B = 10^{-5} \times 10^{10}$

c) $C = (4^5)^3$

d) $D = ((-5)^4)^{-2}$

e) $E = \dfrac{9^{-7}}{9^{-11}}$

f) $F = \dfrac{(-6)^7}{(-6)^{-2}}$

g) $G = 3^4 \times 2^4$

h) $H = (-3)^5 \times 4^5$

i) $I = \left(\dfrac{-5}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{-5}{3}\right)^7$

j) $J = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-6}$

k) $K = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{6}{5}\right)^5$

l) $L = \left(\dfrac{9}{4}\right)^6 \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^6$

Exercice 2

Écris le plus simplement possible et sans utiliser des valeurs approchées :

a) $A' = 2 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^7$

b) $B' = \dfrac{10^{-8} \times 7 \times 10^{11}}{21 \times 10^3}$

c) $C' = \dfrac{4 \times (10^{-2})^3 \times 10^4}{12 \times 10^{-3}}$

d) $D' = \dfrac{24 \times 10^2 \times 3,5 \times 10^4}{8 \times 10^{-2} \times 21 \times 10^6}$

e) $E' = \dfrac{1,5 \times 10^{-5} \times \left(2 \times 10^3\right)^2}{0,14 \times 10^2}$

f) $F' = \dfrac{9 \times (10^2)^3 \times 2^2 \times 10^8 \times 10^6}{(10^8)^2}$

Exercice 3

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

a) $G' = 0,000\,000\,000\,045$

b) $H' = 39\,000\,000\,000\,000$

c) $I' = 8,2 \times 10^{-11} \times 0,5 \times 10^16$

d) $J' = 1230 \times 10^7$

e) $K' = 0,0356 \times 10^15$

f) $L' = \dfrac{12 \times 10^{-9} \times 5 \times (10^2)^3}{24 \times 10^{-2}}$

g) $M' = \dfrac{2 \times 10^7 \times 35 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}}$

h) $N' = \dfrac{0,007 \times 10^{-5} \times 1,1 \times (10^5)^4}{7,7 \times (10^5)^3}$

DimaMath.com

Exercice 4

1/ Soit n un nombre entier non nul. Réduire les expressions suivantes :

a) $P' = \dfrac{2^{2n+2} - 2^{2n}}{2^{2n+1} + 2^{2n}}$

b) $Q' = \dfrac{2^{n+1} \times 3^{2n+2} - 72}{2^{n+2} \times 9^n - 16}$

c) $I' = \dfrac{4^{n+2} - 4^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} + 4^{n+1}}$

d) $J' = \dfrac{7^{2n-3} \times 2^{n+2} \times 3^{2n}}{2^n \times 7^{2n-2} \times 3^{2n-1}}$

2/ Déterminer le nombre entier n tel que :

a) $\dfrac{21^{102}}{3^{100} \times 7^{104}} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$.

b) $\dfrac{9^{n-2} \times 3^{2n+2}}{(27)^{n+3}} = 81$.

c) $4\left(5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}\right) = 20^n \times 31$.

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels non nuls. Réduire les expressions suivantes :

a) $Z' = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^2}{a}\right)^3$

b) $Y' = \left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4 \times \left(\dfrac{b}{a}\right)^4$

c) $X' = \left(\dfrac{a}{b^3}\right)^{-5} \times \left(\dfrac{b}{a}\right)^8$

d) $W' = \left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^5 \times \left(\dfrac{b^2}{a}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^2}{a^4}\right)^3$

e) $V' = \dfrac{27a^{-3} \times (4b)^2 \times 3ab}{64b^3 \times 3^4 \times a^{-3}}$

f) $U' = \dfrac{a^2}{b^{-7}} \times \dfrac{(ab)^{-2}}{a^8} \times \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right]^3$

g) $T' = \dfrac{a^3 \times \left(b^{-2} \times a^3\right)^4 \times b^2}{(b^2)^{-3} \times a^5}$

h) $S' = (a^{-3} \times b^2)^3 \left((a^4) \times b^{-3}\right)^{-3}$

i) $R' = \dfrac{a^4\, b^{-2}\, a\, b^{-5}}{a^{-3}\, b^2\, a^5\, b}$

j) $Q' = \dfrac{a^3\, b^{-2}\, (a^{-3})^{-5}\, a^{-4}\, b^{-3}}{a^{-2}\, b\, (a\, b^{-3})^{-4}\, a^{-3}\, b^{-3}}$

Exercice 6

1/ Écris les nombres suivants en notation scientifique :

a) $A = 7541$

b) $B = 15,14$

c) $C = 0,16 \times 10^2$

d) $D = 26045$

e) $E = 0,0013$

f) $F = 165 \times 10^{-}6$

g) $G = 6845$

h) $H = 0,000171$

i) $I = 0,0091 \times 10^{-9}$

2/ Ranges ces nombres dans l'ordre croissant.

Exercice 7

1/ Montrer que : $33333^2 + 44444^2 = 55555^2$

2/ Montrer que : $32^{16} = 16^{20}$

DimaMath.com

3/ Sans calculer le nombre $4^5 \times 5^{13}$, déterminer le nombre de ses chiffres.

4/ Montrer que pour tout entier n on a : $7^n\left(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}\right) = 13 \times 21^n$

Exercice 8

Calculer les expressions suivantes et donner l'écriture scientifique des résultats :

a) $A = \dfrac{350 \times 10^7 \times 2 \times 10^{10}}{400 \times (10^{-6})^3}$

b) $B = \dfrac{0,4 \times 10^1 \times 3,6 \times 10^{-5}}{1,6 \times (10^4)^7}$

c) $C = \dfrac{0,21 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^5}{11\,200 \times (10^{-10})^3}$

d) $D = \dfrac{9 \times 10^{-6} \times 0,9 \times 10^{-9}}{7\,200 \times (10^9)^4}$

e) $E = \dfrac{0,16 \times 10^{-9} \times 490 \times 10^{-4}}{1,4 \times (10^3)^3}$

f) $F = \dfrac{4\,900 \times 10^{-4} \times 150 \times 10^6}{84 \times (10^{-9})^3}$

g) $G = \dfrac{4\,800 \times 10^6 \times 0,49 \times 10^{-8}}{0,56 \times (10^{-9})^4}$

h) $H = \dfrac{60 \times 10^{-6} \times 240 \times 10^{-3}}{48 \times (10^{10})^4}$

Exercice 9

1/ On pose $M = 275,2 \times (10^2)^{-3}$

a) Donner l'écriture décimale de M.

b) Donner l'écriture scientifique de M.

2/ On pose $A = \dfrac{8 \times 10^{-22} \times 2525}{5^{-6} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 \times 10^{17}}$

a) Montrer que : $A = 2020 \times 10^{-32}$

b) Donner l'écriture scientifique du nombre A.

3/ Soient a et b deux nombres réels non nuls. On pose $D = \dfrac{a^{-2} \times \left(b^2 \times a^3\right)^2 \times b^{-3}}{a^{-3} \times (b \times a^2)^3}$

a) Montrer que $D = a \times b^{-2}$

b) Donner l'écriture scientifique de D pour $a = 2022$ et $b = 1000$.

Exercice 10

La lumière parcourt 300 000 000 mètres par seconde(m/s). Une année est constituée de 32 000 000 de secondes (s).

a) Exprimes ces deux quantités en écriture scientifique.

b) Calcules **une année lumière** c'est à dire la distance que parcourt la lumière en une année.

DimaMath.com

II– Corrigés de exercices

Solution Exercice 1

Écriture sous forme d'une puissance des nombres suivants :

Pour résoudre cet exercice, nous utilisons les propriétés fondamentales des puissances :

- $x^n \times x^m = x^{n+m}$
- $(x^n)^m = x^{n\times m}$
- $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $x^n \times y^n = (x\times y)^n$

a) $A = 5^6 \times 5^{-4}$
$A = 5^{6+(-4)}$
$A = \mathbf{5^2}$

b) $B = 10^{-5} \times 10^{10}$
$B = 10^{-5+10}$
$B = \mathbf{10^5}$

c) $C = (4^5)^3$
$C = 4^{5\times 3}$
$C = \mathbf{4^{15}}$

d) $D = ((-5)^4)^{-2}$
$D = (-5)^{4\times(-2)}$
$D = \mathbf{(-5)^{-8}}$

e) $E = \dfrac{9^{-7}}{9^{-11}}$
$E = 9^{-7-(-11)}$
$E = \mathbf{9^4}$

f) $F = \dfrac{(-6)^7}{(-6)^{-2}}$
$F = (-6)^{7-(-2)}$
$F = \mathbf{(-6)^9}$

g) $G = 3^4 \times 2^4$
$G = (3\times 2)^4$
$G = \mathbf{6^4}$

h) $H = (-3)^5 \times 4^5$
$H = (-3\times 4)^5$
$H = \mathbf{(-12)^5}$

i) $I = \left(\dfrac{-5}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{-5}{3}\right)^7$
$I = \left(\dfrac{-5}{3}\right)^{4+7}$
$I = \mathbf{\left(\dfrac{-5}{3}\right)^{11}}$

j) $J = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-6}$
$J = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{3+(-6)}$
$J = \mathbf{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}}$

k) $K = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \times \left(\dfrac{6}{5}\right)^5$
$K = \left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{6}{5}\right)^5$
$K = \mathbf{\left(\dfrac{4}{5}\right)^5}$

l) $L = \left(\dfrac{9}{4}\right)^6 \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^6$
$L = \left(\dfrac{9}{4}\times\dfrac{8}{9}\right)^6$
$L = \mathbf{2^6}$

Solution Exercice 2

Écriture des nombres suivants, le plus simplement possible sans utiliser de valeurs approchées :

a) $A' = 2\times 10^{-5}\times 3\times 10^7$
$A' = (2\times 3)\times 10^{-5+7}$
$A' = 6\times 10^2$
$A' = 600$

b) $B' = \dfrac{10^{-8}\times 7\times 10^{11}}{21\times 10^3}$
$B' = \dfrac{7\times 10^{-8+11}}{21\times 10^3}$
$B' = \dfrac{7\times 10^3}{21\times 10^3}$
$B' = \dfrac{7}{21}$
$B' = \dfrac{1}{3}$

c) $C' = \dfrac{4\times(10^{-2})^3\times 10^4}{12\times 10^{-3}}$
$C' = \dfrac{4\times 10^{-6}\times 10^4}{12\times 10^{-3}}$
$C' = \dfrac{4\times 10^{-2}}{12\times 10^{-3}}$
$C' = \dfrac{4}{12}\times 10^{-2-(-3)}$
$C' = \dfrac{1}{3}\times 10^1$
$C' = \dfrac{10}{3}$

Dimamath.com

d) $D' = \dfrac{24 \times 10^2 \times 3{,}5 \times 10^4}{8 \times 10^{-2} \times 21 \times 10^6}$

$D' = \dfrac{24 \times 3{,}5}{8 \times 21} \times \frac{10^{2+4}}{10^{-2+6}}$

$D' = \dfrac{3 \times 3{,}5}{21} \times \dfrac{10^6}{10^4}$

$D' = \dfrac{10{,}5}{21} \times 10^{6-4}$

$D' = \dfrac{1}{2} \times 10^2$

$D' = \dfrac{100}{2} = 50$

e) $E' = \dfrac{1{,}5 \times 10^{-5} \times (2 \times 10^3)^2}{0{,}14 \times 10^2}$

$E' = \dfrac{1{,}5 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^6}{14}$

$E' = \dfrac{(1{,}5 \times 4) \times 10^{-5+6}}{14}$

$E' = \dfrac{6 \times 10^1}{14}$

$E' = \dfrac{60}{14}$

$E' = \dfrac{30}{7}$

f) $F' = \dfrac{9 \times (10^2)^3 \times 2^2 \times 10^8 \times 10^6}{(10^8)^2}$

$F' = \dfrac{9 \times 10^6 \times 4 \times 10^{14}}{10^{16}}$

$F' = \dfrac{36 \times 10^{6+14}}{10^{16}}$

$F' = \dfrac{36 \times 10^{20}}{10^{16}}$

$F' = 36 \times 10^{20-16}$

$F' = 36 \times 10^4$

$F' = 360\,000$

Solution Exercice 3

Écriture scientifique des nombres suivants :

a) $G' = 0,000\,000\,000\,045$

$G' = 4,5 \times 10^{-11}$

b) $H' = 39\,000\,000\,000\,000$

$H' = 3,9 \times 10^{13}$

c) $I' = 8,2 \times 10^{-11} \times 0,5 \times 10^{16}$

$I' = (8,2 \times 0,5) \times 10^{-11+16}$

$I' = 4,1 \times 10^5$

d) $J' = 1230 \times 10^7$

$J' = 1,23 \times 10^3 \times 10^7$

$J' = 1,23 \times 10^{10}$

e) $K' = 0,0356 \times 10^{15}$

$K' = 3,56 \times 10^{-2} \times 10^{15}$

$K' = 3,56 \times 10^{13}$

f) $L' = \dfrac{12 \times 10^{-9} \times 5 \times (10^2)^3}{24 \times 10^{-2}}$

$L' = \dfrac{60}{24} \times \dfrac{10^{-9} \times 10^6}{10^{-2}}$

$L' = 2,5 \times \dfrac{10^{-3}}{10^{-2}}$

$L' = 2,5 \times 10^{-3-(-2)}$

$L' = 2,5 \times 10^{-1}$

g) $M' = \dfrac{2 \times 10^7 \times 35 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}}$

$M' = \dfrac{2 \times 35}{5} \times \dfrac{10^4}{10^{-4}}$

$M' = 14 \times 10^{4-(-4)}$

$M' = 14 \times 10^8$

$M' = 1,4 \times 10^1 \times 10^8$

$M' = 1,4 \times 10^9$

h) $N' = \dfrac{0,007 \times 10^{-5} \times 1,1 \times (10^5)^2}{7,7 \times (10^5)^3}$

$N' = \dfrac{7 \times 10^{-3} \times 10^{-5} \times 1,1 \times 10^{10}}{7,7 \times 10^{15}}$

$N' = \dfrac{7 \times 1,1}{7,7} \times \dfrac{10^2}{10^{15}}$

$N' = \dfrac{7,7}{7,7} \times 10^{2-15}$

$N' = 1 \times 10^{-13}$

Solution Exercice 4

1/ Réduction des expressions suivantes :

a) Réduction de $P' = \dfrac{2^{2n+2} - 2^{2n}}{2^{2n+1} + 2^{2n}}$

Dimamath.com

En factorisant par 2^{2n} au numérateur et au dénominateur :

$$P' = \frac{2^{2n}(2^2-1)}{2^{2n}(2^1+1)} = \frac{4-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

Conclusion : P′ = 1

b) Réduction de $Q' = \dfrac{2^{n+1}\times 3^{2n+2} - 72}{2^{n+2}\times 9^n - 16}$

Sachant que $9^n = (3^2)^n = 3^{2n}$, on peut réécrire l'expression :

$$\text{Numérateur} = 2\times 2^n \times 3^2 \times 3^{2n} - 72 = 18\times(2^n\times 3^{2n}) - 72 = 18(2^n\times 3^{2n} - 4)$$
$$\text{Dénominateur} = 2^2\times 2^n \times 3^{2n} - 16 = 4\times(2^n\times 3^{2n}) - 16 = 4(2^n\times 3^{2n} - 4)$$

En simplifiant par $(2^n\times 3^{2n} - 4)$:

$$Q' = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Conclusion : Q′ = $\dfrac{9}{2}$

c) Réduction de $I' = \dfrac{4^{n+2} - 4^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} + 4^{n+1}}$

On sait que $\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} = 4^n$. L'expression devient :

$$I' = \frac{4^{n+1}(4-1)}{4^n + 4^{n+1}} = \frac{3\times 4^{n+1}}{4^n(1+4)} = \frac{3\times 4\times 4^n}{5\times 4^n} = \frac{12}{5}$$

Conclusion : I′ = $\dfrac{12}{5}$

d) Réduction de $J' = \dfrac{7^{2n-3}\times 2^{n+2}\times 3^{2n}}{2^n\times 7^{2n-2}\times 3^{2n-1}}$

En regroupant les puissances de mêmes bases :

$$J' = 7^{(2n-3)-(2n-2)}\times 2^{(n+2)-n}\times 3^{2n-(2n-1)} = 7^{-1}\times 2^2\times 3^1 = \frac{4\times 3}{7} = \frac{12}{7}$$

Conclusion : J′ = $\dfrac{12}{7}$

2/ Détermination du nombre entier n tel que :

a) $\dfrac{21^{102}}{3^{100}\times 7^{104}} = \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$

Comme $21 = 3\times 7$, le membre de gauche devient :

$$\frac{3^{102}\times 7^{102}}{3^{100}\times 7^{104}} = 3^{102-100}\times 7^{102-104} = 3^2\times 7^{-2} = \frac{3^2}{7^2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

Par identification : **Conclusion : n = 2**

b) $\dfrac{9^{n-2}\times 3^{2n+2}}{(27)^{n+3}} = 81$

Exprimons toutes les bases en puissances de 3 ($9 = 3^2$, $27 = 3^3$ et $81 = 3^4$) :

$$\frac{(3^2)^{n-2}\times 3^{2n+2}}{(3^3)^{n+3}} = 3^4 \implies \frac{3^{2n-4}\times 3^{2n+2}}{3^{3n+9}} = 3^4$$

$$3^{(2n-4)+(2n+2)-(3n+9)} = 3^4 \implies 3^{n-11} = 3^4$$

On en déduit que :

$$n - 11 = 4 \implies n = 15$$

Conclusion : n = 15

DimaMath.com

c) $4(5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}) = 20^n \times 31$

Factorisons le membre de gauche par 5^n :

$$4 \times 5^n(1 + 5^1 + 5^2) = 20^n \times 31 \implies 4 \times 5^n \times (1 + 5 + 25) = 20^n \times 31$$

$$4 \times 5^n \times 31 = 20^n \times 31$$

En simplifiant par 31 de chaque côté :

$$4 \times 5^n = 20^n$$

Comme $20^n = (4 \times 5)^n = 4^n \times 5^n$, on a :

$$4 \times 5^n = 4^n \times 5^n$$

Puisque $5^n \neq 0$, on simplifie par 5^n :

$$4 = 4^n \implies n = 1$$

Conclusion : n = 1

Solution Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels non nuls. Réduire les expressions suivantes :

a) Réduction de $Z' = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^3$

En regroupant sous la même puissance :

$$Z' = \left(\frac{a}{b} \times \frac{b^2}{a}\right)^3 = (b)^3 = b^3$$

Conclusion : $Z' = b^3$

b) Réduction de $Y' = \left(\frac{a^2}{b}\right)^4 \times \left(\frac{b}{a}\right)^4$

En regroupant sous la même puissance :

$$Y' = \left(\frac{a^2}{b} \times \frac{b}{a}\right)^4 = (a)^4 = a^4$$

Conclusion : $Y' = a^4$

c) Réduction de $X' = \left(\frac{a}{b^3}\right)^{-5} \times \left(\frac{b}{a}\right)^8$

En inversant la fraction pour rendre l'exposant positif :

$$X' = \left(\frac{b^3}{a}\right)^5 \times \left(\frac{b}{a}\right)^8 = \frac{b^{15}}{a^5} \times \frac{b^8}{a^8} = \frac{b^{15+8}}{a^{5+8}} = \frac{b^{23}}{a^{13}}$$

Conclusion : $X' = \frac{b^{23}}{a^{13}}$

d) Réduction de $W' = \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^5 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^3$

Dimamath.com

En développant chaque puissance :

$$W' = \frac{a^{15}}{b^{10}} \times \frac{b^6}{a^3} \times \frac{b^6}{a^{12}} = \frac{a^{15}}{a^{3+12}} \times \frac{b^{6+6}}{b^{10}} = \frac{a^{15}}{a^{15}} \times \frac{b^{12}}{b^{10}} = 1 \times b^2 = b^2$$

Conclusion : $\mathbf{W' = b^2}$

e) Réduction de $V' = \dfrac{27a^{-3} \times (4b)^2 \times 3ab}{64b^3 \times 3^4 \times a^{-3}}$

On simplifie directement a^{-3} au numérateur et au dénominateur, et on décompose les nombres en facteurs premiers ($27 = 3^3$, $64 = 2^6$, $(4b)^2 = 16b^2 = 2^4b^2$) :

$$V' = \frac{3^3 \times 2^4b^2 \times 3ab}{2^6b^3 \times 3^4} = \frac{3^{3+1} \times 2^4 \times a \times b^{2+1}}{3^4 \times 2^6 \times b^3} = \frac{3^4 \times 2^4 \times ab^3}{3^4 \times 2^6 \times b^3}$$

En simplifiant par 3^4 et b^3 :

$$V' = \frac{2^4a}{2^6} = \frac{a}{2^2} = \frac{a}{4}$$

Conclusion : $\mathbf{V' = \dfrac{a}{4}}$

f) Réduction de $U' = \dfrac{a^2}{b^{-7}} \times \dfrac{(ab)^{-2}}{a^8} \times \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right]^3$

Développons chaque bloc :

$$\frac{a^2}{b^{-7}} = a^2b^7, \quad \frac{(ab)^{-2}}{a^8} = \frac{a^{-2}b^{-2}}{a^8} = a^{-10}b^{-2}, \quad \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{-6} = \frac{a^{-6}}{b^{-6}} = a^{-6}b^6$$

En multipliant tout ensemble :

$$U' = (a^2b^7) \times (a^{-10}b^{-2}) \times (a^{-6}b^6) = a^{2-10-6} \times b^{7-2+6} = a^{-14}b^{11} = \frac{b^{11}}{a^{14}}$$

Conclusion : $\mathbf{U' = \dfrac{b^{11}}{a^{14}}}$

g) Réduction de $T' = \dfrac{a^3 \times (b^{-2} \times a^3)^4 \times b^2}{(b^2)^{-3} \times a^5}$

Développons le numérateur et le dénominateur :

$$T' = \frac{a^3 \times b^{-8} \times a^{12} \times b^2}{b^{-6} \times a^5} = \frac{a^{3+12} \times b^{-8+2}}{a^5 \times b^{-6}} = \frac{a^{15}b^{-6}}{a^5b^{-6}}$$

En simplifiant par b^{-6} :

$$T' = \frac{a^{15}}{a^5} = a^{15-5} = a^{10}$$

Conclusion : $\mathbf{T' = a^{10}}$

h) Réduction de $S' = (a^{-3} \times b^2)^3((a^4) \times b^{-3})^{-3}$

En appliquant les puissances :

$$S' = (a^{-9} \times b^6) \times (a^{-12} \times b^9) = a^{-9-12} \times b^{6+9} = a^{-21}b^{15} = \frac{b^{15}}{a^{21}}$$

Conclusion : $\mathbf{S' = \dfrac{b^{15}}{a^{21}}}$

Dimamath.com

i) Réduction de $R' = \dfrac{a^4b^{-2}ab^{-5}}{a^{-3}b^2a^5b}$

En regroupant au numérateur et au dénominateur :

$$R' = \frac{a^{4+1}b^{-2-5}}{a^{-3+5}b^{2+1}} = \frac{a^5b^{-7}}{a^2b^3} = a^{5-2}b^{-7-3} = a^3b^{-10} = \frac{a^3}{b^{10}}$$

Conclusion : R′ = $\dfrac{\mathbf{a^3}}{\mathbf{b^{10}}}$

j) Réduction de $Q' = \dfrac{a^3b^{-2}(a^{-3})^{-5}a^{-4}b^{-3}}{a^{-2}b(ab^{-3})^{-4}a^{-3}b^{-3}}$

Simplifions d'abord les termes à puissance : $(a^{-3})^{-5} = a^{15}$ et $(ab^{-3})^{-4} = a^{-4}b^{12}$.

$$\text{Numérateur} = a^3 \times b^{-2} \times a^{15} \times a^{-4} \times b^{-3} = a^{3+15-4} \times b^{-2-3} = a^{14}b^{-5}$$
$$\text{Dénominateur} = a^{-2} \times b \times (a^{-4}b^{12}) \times a^{-3} \times b^{-3} = a^{-2-4-3} \times b^{1+12-3} = a^{-9}b^{10}$$

On rassemble le tout :

$$Q' = \frac{a^{14}b^{-5}}{a^{-9}b^{10}} = a^{14-(-9)}b^{-5-10} = a^{23}b^{-15} = \frac{a^{23}}{b^{15}}$$

Conclusion : Q′ = $\dfrac{\mathbf{a^{23}}}{\mathbf{b^{15}}}$

Solution Exercice 6

1. Notation scientifique des nombres :

   Pour écrire un nombre en notation scientifique, on l'exprime sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq |a| < 10$ et n est un entier relatif.

   a) $A = 7541 = \mathbf{7,541 \times 10^3}$
   b) $B = 15,14 = \mathbf{1,514 \times 10^1}$
   c) $C = 0,16 \times 10^2 = 1,6 \times 10^{-1} \times 10^2 = \mathbf{1,6 \times 10^1}$ (soit 16)
   d) $D = 26045 = \mathbf{2,6045 \times 10^4}$
   e) $E = 0,0013 = \mathbf{1,3 \times 10^{-3}}$
   f) $F = 165 \times 10^{-6} = 1,65 \times 10^2 \times 10^{-6} = \mathbf{1,65 \times 10^{-4}}$
   g) $G = 6845 = \mathbf{6,845 \times 10^3}$
   h) $H = 0,000171 = \mathbf{1,71 \times 10^{-4}}$
   i) $I = 0,0091 \times 10^{-9} = 9,1 \times 10^{-3} \times 10^{-9} = \mathbf{9,1 \times 10^{-12}}$

2. Rangement des nombres dans l'ordre croissant :

   Pour comparer plus facilement, on peut regarder l'écriture décimale ou comparer les puissances de 10 de la notation scientifique :

   - $I = 0,0000000000091$
   - $F = 0,000165$
   - $H = 0,000171$
   - $E = 0,0013$
   - $B = 15,14$
   - $C = 16$
   - $G = 6845$
   - $A = 7541$
   - $D = 26045$

Dimamath.com

L'ordre croissant est donc :

$$\mathbf{I < F < H < E < B < C < G < A < D}$$

Solution Exercice 7

1/ Montrons que $33333^2 + 44444^2 = 55555^2$:

Remarquons que chaque nombre est un multiple de 11111 :

$$33333 = 3 \times 11111$$
$$44444 = 4 \times 11111$$
$$55555 = 5 \times 11111$$

En utilisant la propriété des puissances $(a \times b)^n = a^n \times b^n$, on a :

$$\begin{aligned} 33333^2 + 44444^2 &= (3 \times 11111)^2 + (4 \times 11111)^2 \\ &= 3^2 \times 11111^2 + 4^2 \times 11111^2 \\ &= (3^2 + 4^2) \times 11111^2 \\ &= (9 + 16) \times 11111^2 \\ &= 25 \times 11111^2 \\ &= 5^2 \times 11111^2 \\ &= (5 \times 11111)^2 \\ &= \mathbf{55555^2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc bien démontrée.

2/ Montrons que $32^{16} = 16^{20}$:

Exprimons les bases 32 et 16 comme des puissances de 2 :

$$32 = 2^5 \quad \text{et} \quad 16 = 2^4$$

En utilisant la règle des puissances $(a^n)^m = a^{n \times m}$, transformons les deux membres :

$$32^{16} = (2^5)^{16} = 2^{5 \times 16} = \mathbf{2^{80}}$$
$$16^{20} = (2^4)^{20} = 2^{4 \times 20} = \mathbf{2^{80}}$$

Comme les deux membres sont égaux à 2^{80}, on a bien : $\mathbf{32^{16} = 16^{20}}$.

3/ Déterminons le nombre de chiffres de $4^5 \times 5^{13}$ sans le calculer :

Pour trouver le nombre de chiffres, essayons de faire apparaître des puissances de 10. On sait que $10 = 2 \times 5$. Transformons d'abord 4^5 en base 2 :

$$4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$$

Réécrivons maintenant le produit en associant les puissances de 2 et de 5 :

$$\begin{aligned} 4^5 \times 5^{13} &= 2^{10} \times 5^{13} \\ &= 2^{10} \times 5^{10} \times 5^3 \\ &= (2 \times 5)^{10} \times 5^3 \\ &= 10^{10} \times 125 \\ &= \mathbf{125 \times 10^{10}} \end{aligned}$$

DimaMath.com

Le nombre s'écrit donc comme le nombre 125 suivi de 10 zéros.
Le nombre total de chiffres est : 3 (pour 125) + 10 (zéros) = **13** chiffres.

4/ Montrons que pour tout entier n, $7^n(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}) = 13 \times 21^n$:

Travaillons sur le membre de gauche en factorisant par 3^n dans la parenthèse :

$$\begin{aligned} 7^n(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}) &= 7^n\left(3^n \times 1 + 3^n \times 3^1 + 3^n \times 3^2\right) \\ &= 7^n \times 3^n\,(1 + 3 + 9) \\ &= (7 \times 3)^n \times 13 \\ &= 21^n \times 13 \\ &= \mathbf{13 \times 21^n} \end{aligned}$$

L'égalité est ainsi vérifiée pour tout entier n.

Solution Exercice 8

Rappel : Pour donner l'écriture scientifique d'un nombre, il faut l'exprimer sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq |a| < 10$ et n est un entier relatif.

a) $A = \dfrac{350 \times 10^7 \times 2 \times 10^{10}}{400 \times (10^{-6})^3}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{350 \times 2 \times 10^7 \times 10^{10}}{400 \times 10^{-18}} \\ A &= \frac{700 \times 10^{17}}{400 \times 10^{-18}} \\ A &= \frac{700}{400} \times 10^{17-(-18)} \\ A &= 1,75 \times 10^{35} \end{aligned}$$

L'écriture scientifique de A est : $\mathbf{A = 1,75 \times 10^{35}}$

b) $B = \dfrac{0,4 \times 10^1 \times 3,6 \times 10^{-5}}{1,6 \times (10^4)^7}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{0,4 \times 3,6 \times 10^{1-5}}{1,6 \times 10^{28}} \\ B &= \frac{1,44 \times 10^{-4}}{1,6 \times 10^{28}} \\ B &= \frac{1,44}{1,6} \times 10^{-4-28} \\ B &= 0,9 \times 10^{-32} \end{aligned}$$

L'écriture scientifique de B est : $\mathbf{B = 9 \times 10^{-33}}$

DimaMath.com

c) $C = \dfrac{0,21 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{5}}{11\,200 \times (10^{-10})^{3}}$

$$C = \frac{0,21 \times 40 \times 10^{-2+5}}{11\,200 \times 10^{-30}}$$
$$C = \frac{8,4 \times 10^{3}}{1,12 \times 10^{4} \times 10^{-30}}$$
$$C = \frac{8,4}{1,12} \times 10^{3-(4-30)}$$
$$C = 7,5 \times 10^{3-(-26)}$$
$$C = 7,5 \times 10^{29}$$

L'écriture scientifique de C est : $\mathbf{C = 7,5 \times 10^{29}}$

d) $D = \dfrac{9 \times 10^{-6} \times 0,9 \times 10^{-9}}{7\,200 \times (10^{9})^{4}}$

$$D = \frac{9 \times 0,9 \times 10^{-6-9}}{7,2 \times 10^{3} \times 10^{36}}$$
$$D = \frac{8,1 \times 10^{-15}}{7,2 \times 10^{39}}$$
$$D = \frac{8,1}{7,2} \times 10^{-15-39}$$
$$D = 1,125 \times 10^{-54}$$

L'écriture scientifique de D est : $\mathbf{D = 1,125 \times 10^{-54}}$

e) $E = \dfrac{0,16 \times 10^{-9} \times 490 \times 10^{-4}}{1,4 \times (10^{3})^{3}}$

$$E = \frac{0,16 \times 490 \times 10^{-9-4}}{1,4 \times 10^{9}}$$
$$E = \frac{78,4 \times 10^{-13}}{1,4 \times 10^{9}}$$
$$E = \frac{78,4}{1,4} \times 10^{-13-9}$$
$$E = 56 \times 10^{-22}$$

L'écriture scientifique de E est : $\mathbf{E = 5,6 \times 10^{-21}}$

f) $F = \dfrac{4900 \times 10^{-4} \times 150 \times 10^{6}}{84 \times (10^{-9})^{3}}$

$$F = \frac{4900 \times 150 \times 10^{-4} \times 10^{6}}{84 \times 10^{-27}}$$
$$F = \frac{735\,000 \times 10^{2}}{84 \times 10^{-27}}$$
$$F = \frac{735\,000}{84} \times 10^{2-(-27)}$$
$$F = 8750 \times 10^{29}$$
$$F = 8,75 \times 10^{3} \times 10^{29}$$

L'écriture scientifique de F est : $\mathbf{F = 8,75 \times 10^{32}}$

DimaMath.com

g) $G = \dfrac{4800 \times 10^6 \times 0,49 \times 10^{-8}}{0,56 \times (10^{-9})^4}$

$$G = \frac{4800 \times 0,49 \times 10^{6-8}}{0,56 \times 10^{-36}}$$
$$G = \frac{2352 \times 10^{-2}}{0,56 \times 10^{-36}}$$
$$G = \frac{2352}{0,56} \times 10^{-2-(-36)}$$
$$G = 4200 \times 10^{34}$$
$$G = 4,2 \times 10^3 \times 10^{34}$$

L'écriture scientifique de G est : $\mathbf{G = 4,2 \times 10^{37}}$

h) $H = \dfrac{60 \times 10^{-6} \times 240 \times 10^{-3}}{48 \times (10^{10})^4}$

$$H = \frac{60 \times 240 \times 10^{-6-3}}{48 \times 10^{40}}$$
$$H = \frac{14\,400 \times 10^{-9}}{48 \times 10^{40}}$$
$$H = \frac{14\,400}{48} \times 10^{-9-40}$$
$$H = 300 \times 10^{-49}$$
$$H = 3 \times 10^2 \times 10^{-49}$$

L'écriture scientifique de H est : $\mathbf{H = 3 \times 10^{-47}}$

Solution Exercice 9

1/ On pose $M = 275,2 \times (10^2)^{-3}$

Simplifions d'abord la puissance de 10 : $(10^2)^{-3} = 10^{2\times(-3)} = 10^{-6}$.
Ainsi, $M = 275,2 \times 10^{-6}$.

a) Écriture décimale de M :

Multiplier par 10^{-6} revient à décaler la virgule de 6 rangs vers la gauche :

$$\mathbf{M = 0,0002752}$$

b) Écriture scientifique de M :

On exprime le nombre sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$:

$$M = 2,752 \times 10^2 \times 10^{-6} = \mathbf{2,752 \times 10^{-4}}$$

2/ On pose $A = \dfrac{8 \times 10^{-22} \times 2525}{5^{-6} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 \times 10^{17}}$

a) Montrons que $A = 2020 \times 10^{-32}$:

Simplifions d'abord le dénominateur :

- $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$
- $5^{-6} \times 2^{-6} = (5 \times 2)^{-6} = 10^{-6}$

Le dénominateur devient donc : $10^{-6} \times 10^{17} = 10^{-6+17} = 10^{11}$.
Calculons maintenant le numérateur pour les facteurs numériques :

$$8 \times 2525 = 20200$$

Recomposons la fraction :

$$A = \frac{20200 \times 10^{-22}}{10^{11}} = 20200 \times 10^{-22-11} = 20200 \times 10^{-33}$$

En écrivant 20200 sous la forme 2020×10^1, on obtient :

$$A = 2020 \times 10^1 \times 10^{-33} = \mathbf{2020 \times 10^{-32}}$$

L'égalité est bien démontrée.

b) Écriture scientifique de A :

$$A = 2,020 \times 10^3 \times 10^{-32} = \mathbf{2,02 \times 10^{-29}}$$

3/ Soient a et b deux nombres réels non nuls. On pose $D = \dfrac{a^{-2} \times (b^2 \times a^3)^2 \times b^{-3}}{a^{-3} \times (b \times a^2)^3}$

a) Montrons que $D = a \times b^{-2}$:
Développons les puissances au numérateur et au dénominateur :

$$\text{Numérateur} = a^{-2} \times (b^4 \times a^6) \times b^{-3} = a^{-2+6} \times b^{4-3} = a^4 \times b^1$$
$$\text{Dénominateur} = a^{-3} \times (b^3 \times a^6) = a^{-3+6} \times b^3 = a^3 \times b^3$$

Formons maintenant le quotient D :

$$D = \frac{a^4 \times b^1}{a^3 \times b^3} = a^{4-3} \times b^{1-3} = a^1 \times b^{-2} = \mathbf{a \times b^{-2}}$$

L'égalité est ainsi démontrée.

b) Écriture scientifique de D pour $a = 2022$ et $b = 1000$:
Remplaçons a et b par leurs valeurs sachant que $b = 1000 = 10^3$:

$$D = 2022 \times (10^3)^{-2} = 2022 \times 10^{-6}$$

Passons à l'écriture scientifique :

$$D = 2,022 \times 10^3 \times 10^{-6} = \mathbf{2,022 \times 10^{-3}}$$

Solution Exercice 10

a) Exprimons ces deux quantités en écriture scientifique :

Pour écrire un nombre en notation scientifique, on l'exprime sous la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n un entier relatif.

DimaMath.com

- Vitesse de la lumière (v) :

$$300\,000\,000 \text{ m/s} = \mathbf{3} \times \mathbf{10^8} \text{ m/s}$$

- Nombre de secondes dans une année (t) :

$$32\,000\,000 \text{ s} = \mathbf{3,2} \times \mathbf{10^7} \text{ s}$$

b) Calculer une année-lumière (la distance parcourue en une année) :

La formule de la distance est : $d = v \times t$.
Utilisons les écritures scientifiques déterminées à la question précédente :

$$d = (3 \times 10^8) \times (3,2 \times 10^7)$$
$$d = (3 \times 3,2) \times (10^8 \times 10^7)$$
$$d = 9,6 \times 10^{8+7}$$
$$d = \mathbf{9,6} \times \mathbf{10^{15}} \text{ mètres}$$

Une année-lumière est donc égale à $\mathbf{9,6} \times \mathbf{10^{15}}$ mètres (soit 9,6 billions de kilomètres).

DimaMath.com