Série corrigée 4

Étude des fonctions

2 BAC SECO et SGC S. EL JAAFARI

Énoncés des exercices

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2x-2}{x+3}\geq 0$.

b) En déduire que le domaine de définition de f est $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire l'équation de l'**asymptote horizontale** à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$. Quelle est la nature de l'**asymptote** correspondante et son équation ?

2/ a) Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable sur $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

b) Étudier la **dérivabilité à droite au point** $x_0=1$ en calculant la limite suivante :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

3/ a) Soit $u(x)=\frac{2x-2}{x+3}$. Calculer la fonction dérivée $u'(x)$ sur D_f.

b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{4}{(x+3)^2\times\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}$$

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur les intervalles de dérivabilité.

d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f

4/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.

Dimamath.com

Exercice 2

I - On considère g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2/ Montrer, pour tout réel x, que

$$g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

3/ Donner le tableau des variations de g.

4/ En déduire, pour tout réel x, que $g(x) > 0$.

II - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.

3/ Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4/ a) Montrer, pour tout réel x, que $f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau des variations de f.

5/ Calculer $f(1)$ puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

III - 1/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

3/ Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

.

1/ Montrer que $D_f = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

3/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.

Dimamath.com

5/ a) Vérifier que $\forall x \in D_f,\ f(x)-x=\dfrac{x(4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$.

b) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(D): y=x$ sur D_f.

6/ a) Montrer que sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x-4}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.

7/ Tracer $(\mathcal{C}_f)$ (On admet que $I(9;\dfrac{9}{2})$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$).

8/ Soit g la restriction de f sur $[4;+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{1}{x}$$

1/ Montrer que : $D_f=]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$.

2/ Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et Montrer que : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$.

3/ Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, et Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

4/ a) Montrer que $\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2(x-1)\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1\right)}$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

5/ a) Déterminer l'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

6/ Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7/ Soit g la restriction de f sur $I=[1,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

DimaMath.com

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f , D_f.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, puis en déduire une interprétation graphique.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

4/ Montrer que les droites d'équations $y=x-1$ et $y=-x+1$ sont respectivement des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

5/ a) Montrer que $\forall x\in D_f$, $f'(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

5/ Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

6/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

7/ Soit g la restriction de f sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $(g^{-1})'(0)$.

c) Comparer $g^{-1}(\sqrt[3]{2})$ et $g^{-1}(\sqrt[4]{4})$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

2/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ).

3/ a) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1 à droite et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4/ Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=[1,+\infty[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

DimaMath.com

b) Calculer $g\left(\frac{5}{3}\right)$ et en déduire $g^{-1}\left(\frac{19}{6}\right)$.

c) Tracer $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \dfrac{2}{x} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} & ; x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

(C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Montrer que f est continue en $x_0 = 1$

b) Calculer $f(-2)$; $f(-\sqrt{2})$; $f(-1)$; $f(1)$ et $f(4)$

2/ a) Montrer que f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b) Donner l'équation de la demi-tangente (Δ_1) à gauche en $x_0 = 1$

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$, et donner une interprétation graphique du résultat obtenu

3/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$, dont on donnera l'équation réduite

4/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Étudier la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

5/ Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de 0

6/ a) Montrer que :

$$\begin{cases} f'(x) = -1 - \dfrac{2}{x^2} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f'(x) = \dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}} & ; x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

b) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation

7/ a) Donner l'équation de la tangente (Δ_2) à (C_f) au point d'abscisse $-\sqrt{2}$

b) Construire les droites (D), (Δ_1), (Δ_2) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8/ Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty, 0[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et en déduire $g^{-1}(0)$

c) Construire dans le même repère la courbe représentative de g^{-1} que l'on notera $(C_{g^{-1}})$

d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $g^{-1}(x)$

Dimamath.com

Exercice 8

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1} & ; \text{ si } x < 1 \\ f(x) = 1 - \sqrt{x - 1} & ; \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Continuité et dérivabilité

1/ **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et vérifier que $f(1) = 1$.

b) Montrer que la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.

2/ **a)** Étudier la dérivabilité de f à gauche au point $x_0 = 1$, puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite au point $x_0 = 1$, puis interpréter graphiquement le résultat.

c) La fonction f est-elle dérivable au point $x_0 = 1$? Justifier.

Partie B : Limites et branches infinies

1/ **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2/ **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

Partie C : Variations et construction

1/ **a)** Montrer que pour tout $x < 1$: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 1$.

2/ Dresser le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3/ Construire les asymptotes, les demi-tangentes au point d'abscisse 1, puis la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Fonction réciproque

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$. En économie, la fonction g modélise le prix unitaire d'un produit (en centaines de dirhams) en fonction de la quantité x demandée (en milliers d'unités).

1/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2/ Calculer $g(2)$ et en déduire $(g^{-1})'(0)$.

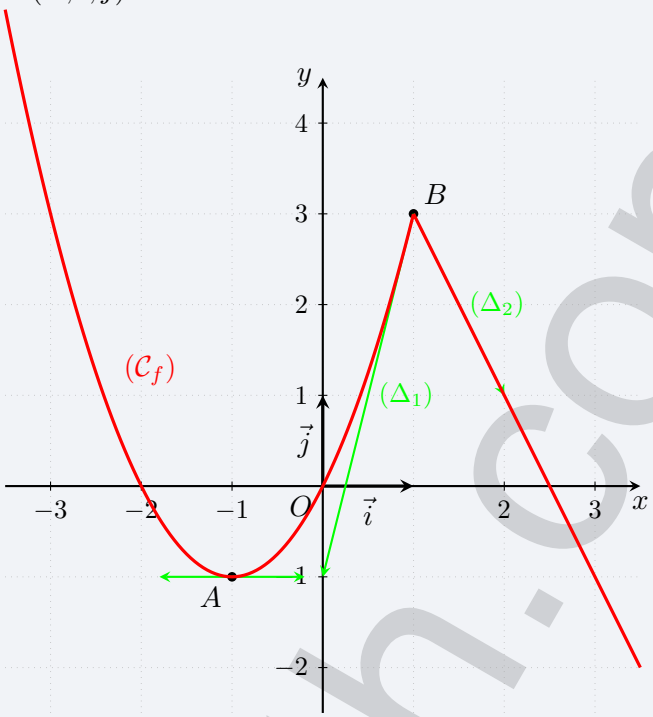
3/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
(L'expression $g^{-1}(x)$ représente la quantité demandée en fonction du prix fixé x).

DimaMath.com

Exercice 9

Partie A : Lecture graphique

On considère une fonction numérique f définie et continue sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ est donnée dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous :



En utilisant ce graphique et les données associées, répondre aux questions suivantes :

1/ Déterminer par lecture graphique les images suivantes : $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.

2/ Déterminer le nombre d'antécédents du nombre 0 par la fonction f. Quels sont-ils ?

3/ a) Donner la valeur du nombre dérivé en -1, noté $f'(-1)$.

b) Déterminer graphiquement le nombre dérivé à gauche en 1, noté $f'_g(1)$, et le nombre dérivé à droite en 1, noté $f'_d(1)$.

4/ a) Donner l'équation réduite de la tangente horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au point A.

b) Donner l'équation réduite de la demi-tangente à droite (Δ_2) au point B.

Partie B : Étude analytique de la fonction

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la Partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x} & \text{; si } \boldsymbol{x \leq 1} \\ \boldsymbol{f(x) = 5 - 2x} & \text{; si } \boldsymbol{x > 1} \end{cases}$$

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et vérifier que $f(1) = 3$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ puis en déduire que f est continue au point $x_0 = 1$.

2/ a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ et retrouver algébriquement la valeur de $f'_g(1)$ lue à la Partie A.

Dimamath.com

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et retrouver algébriquement la valeur de $f'_d(1)$.

c) Interpréter géométriquement la nature du point $B(1;3)$ pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4/ a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

«Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres»
Samuel Johnson

DimaMath.com

Corrigés des exercices

Solution Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}$$

1/ a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{2x-2}{x+3} \geq 0$

Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur et le dénominateur :

- $2x - 2 = 0 \iff x = 1$
- $x + 3 = 0 \iff x = -3$ (valeur interdite)

Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-2}{x+3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\boxed{S =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[}$$

b) Domaine de définition de f

La fonction f est définie si et seulement si l'expression sous la racine carrée est positive ou nulle et le dénominateur est non nul :

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2x-2}{x+3} \geq 0 \text{ et } x+3 \neq 0 \right\}$$

D'après la question précédente, on en déduit immédiatement que :

$$\boxed{D_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[}$$

c) Calcul des limites en $\pm\infty$ et asymptote horizontale

On calcule d'abord la limite de la fonction rationnelle à l'intérieur de la racine :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$

Par composition avec la fonction racine carrée (qui est continue en 2), on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}}$$

Interprétation géométrique : La droite d'équation $y = \sqrt{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

DimaMath.com

d) Calcul de $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ et asymptote verticale

Quand $x \to -3^-$ on a $x < -3$:

- $\lim\limits_{x\to -3^-} (2x-2) = -8$
- $\lim\limits_{x\to -3^-} (x+3) = 0^-$

Donc $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x-2}{x+3} = +\infty$. Par suite :

$$\boxed{\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty}$$

Interprétation géométrique : La droite d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

2/ a) Dérivabilité de f sur $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

La fonction rationnelle $x \mapsto u(x) = \dfrac{2x-2}{x+3}$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition, donc elle est dérivable sur $]-\infty;-3[$ et sur $]1;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$ $\quad u(x) > 0$ et comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

b) Dérivabilité à droite au point $x_0 = 1$

On a $f(1) = 0$. Calculons la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}{x-1}$$

Pour $x > 1$, on a $x-1 = \sqrt{(x-1)^2}$. En entrant ce terme sous la racine :

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{2(x-1)}{(x+3)(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{2}{(x+3)(x-1)}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^+} (x+3) = 4$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0^+$, alors $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{(x+3)(x-1)} = +\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty}$$

Par conséquent la fonction f n'est donc pas dérivable à droite en $x_0 = 1$.

c) Interprétation géométrique

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet à droite du point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

3/ a) Calcul de la fonction dérivée $u'(x)$

Pour $u(x) = \dfrac{2x-2}{x+3}$, en utilisant la formule $\left(\dfrac{a}{b}\right)' = \dfrac{a'b-ab'}{b^2}$:

$$u'(x) = \frac{2(x+3)-(2x-2)(1)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+2}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2}$$

b) Expression de $f'(x)$

En utilisant la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{\frac{8}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}} = \frac{4}{(x+3)^2 \times \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2 \times \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}}$$

c) Signe de $f'(x)$ Pour tout $x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$: $4>0$, $(x+3)^2>0$ et $\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}>0$.

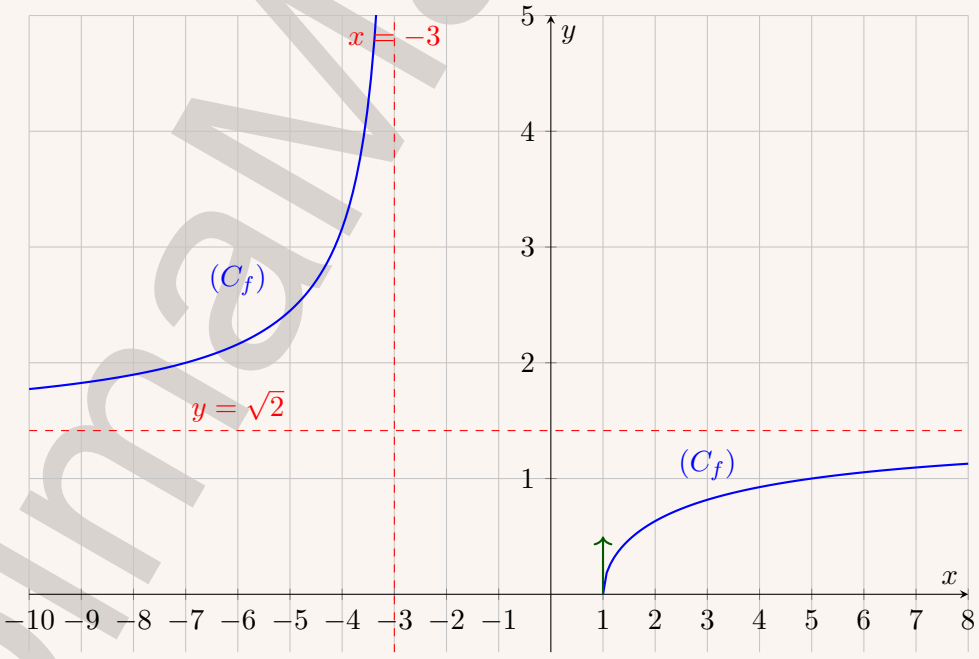
Par conséquent, $f'(x)>0$ sur chacun de ces intervalles.

d) Tableau de variations complet de f

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	‖		$+$	
f	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖	‖	0	↗	$\sqrt{2}$

4/ Construction de la courbe (C_f)

(C_f) est la représentation graphique de la fonction f avec ses asymptotes (la droite verticale $x=-3$ et la droite horizontale $y=\sqrt{2}$) :



DimaMath.com

Solution Exercice 2

Partie I

On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

.

1/ Limites de g en $-\infty$ et $+\infty$

Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, donc $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$. Donc :

$$\lim \lim Doncits_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2]}$$

Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$, donc $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.Donc

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0]}$$

2/ Calcul de $g'(x)$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

Ainsi

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$$

. 3/ Tableau de variations

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	2

4/ Déduction

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Pour tout réel x , $g(x) > \lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) > 0}$$

DimaMath.com

Partie II

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}}$$

.

1/ Limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$. Donc

$$\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}}$$

2/ Limite en $-\infty$

Pour tout x, $\sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$. Donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} - 1 = -1$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1.}}$$

Géométriquement on déduit que **la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.**

3/ Asymptote oblique en $+\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) - (2x-1) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Par suite

$$\lim_{x\to+\inf} f(x) - (2x-1) = \lim x \to +\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Donc **la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.**

4/ **a/** Dérivée

Par un calcul direct, on a :

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = g(x)}}.$$

b/ Tableau de variations

D'après la partie I, $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ g(x) > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) > 0$. Par conséquent f est strictement croissante. sur $\mathbb{R}$.

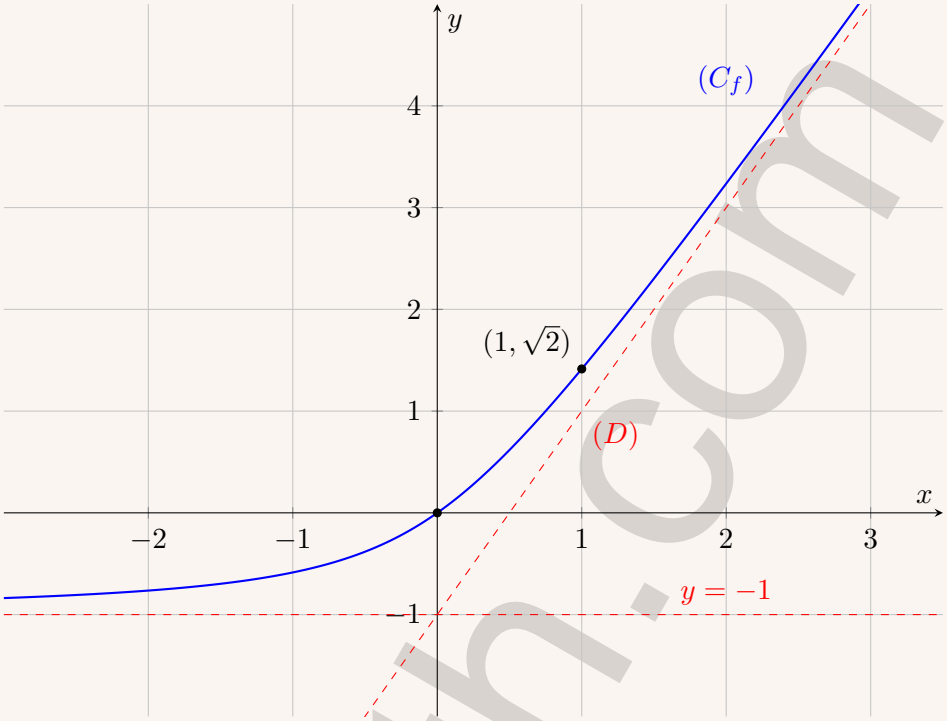
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

DimaMath.com

5/ Calcul de $f(1)$ et tracé

$$f(1) = 1 - 1 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

. **Courbe** (C_f)



Partie III

1/ Fonction réciproque

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur boldmath$J = f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[$.

2/ Dérivabilité de f^{-1} en $\sqrt{2}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = g(x) > 0$. Comme $f(1) = \sqrt{2}$, donc $f^{-1}(\sqrt{2}) = 1$, et $f'(1) \neq 0$. Par conséquent f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ et on a :

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{g(1)}.$$

Or $g(1) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$, donc

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2}.$$

D'où :

$$\boxed{(f^{-1})'(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}}$$

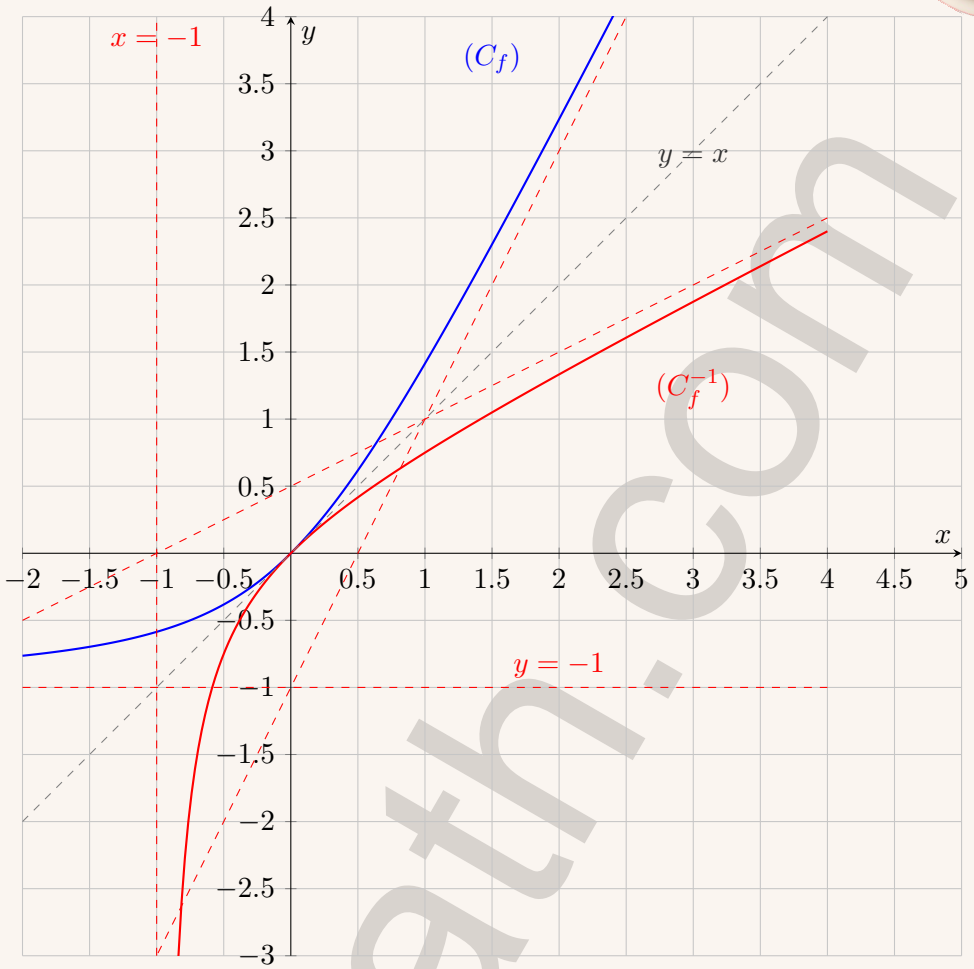
3/ Tracé de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$

La courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ est le symétrique de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En plus l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ de f est $y = 2x - 1$ par conséquent l'équation de l'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ de (C_f^{-1}) est $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Et comme

Dimamath.com

l'asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ de C_f est la droite d'équation $y=-1$, alors la courbe (C_f^{-1}) admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.



Solution Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}.$$

1/ Montrer que $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$

$$x\in D_f \iff x\geq 0 \text{ et } \sqrt{x}-1\neq 0 \iff x\geq 0 \text{ et } x\neq 1$$

Donc

$$\boxed{D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[}$$

2/ Limites en 1^- et 1^+ et interprétation

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x(\sqrt{x}+1)}{x-1}=-\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty}$$

DimaMath.com

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(\sqrt{x}+1)}{x-1} = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty}$$

Interprétation géométrique : la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$.

3/ Limite en $+\infty$ et branche infinie

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1}(\sqrt{x}+1) = 1\times+\infty = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

b) Étude de la branche infinie au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

Interprétation géométrique : La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de** $+\infty$.

4/ Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en 0^+ et interprétation

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1.$$

Interprétation géométrique : $(\mathcal{C}_f)$ admet en $O(0;0)$ une demi-tangente à droite de coefficient directeur -1, d'équation $y = -x$ avec $x \geq 0$.

5/ Position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D) : $y = x$

a) Soit $x \in D_f$:

$$f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - x = \frac{x - x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1}.$$

Soit $x \in D_f$. On a :

$$4 - x = (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) \quad \text{et} \quad x - 1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1).$$

Donc

$$\frac{x(4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} = f(x) - x.$$

D'où, pour tout $x \in D_f$:

$$\boxed{f(x) - x = \frac{x(4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}}$$

DimaMath.com

b) Puisque $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} > 0$ pour tout $x \in D_f$, alors Le signe de $f(x) - x$ est celui de $4 - x$ pour $x - 1$ $x \in D_f$.

x	0		1		4		$+\infty$
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- $(\mathcal{C}_f)$ est **en dessous** de (D) sur $[0;1[$ et sur $]4;+\infty[$;
- $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessus** de (D) sur $]1;4[$;
- $(\mathcal{C}_f)$ et (D) se coupent en $O(0;0)$ et $A(4;4)$.

6/ Variations de f

a) Sur D_f, $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x & \Longrightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} - 1 & \Longrightarrow v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$. Alors

$$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} = \frac{v(x) - x\,v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1 - \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}.$$

Or $\sqrt{x} - 2 = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$, donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{x-4}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}}$$

b) Sur D_f, on a $2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2) > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 4$. Par suite $f'(x) < 0$ sur $[0;1[\cup]1;4[$, $f'(4) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]4;+\infty[$.

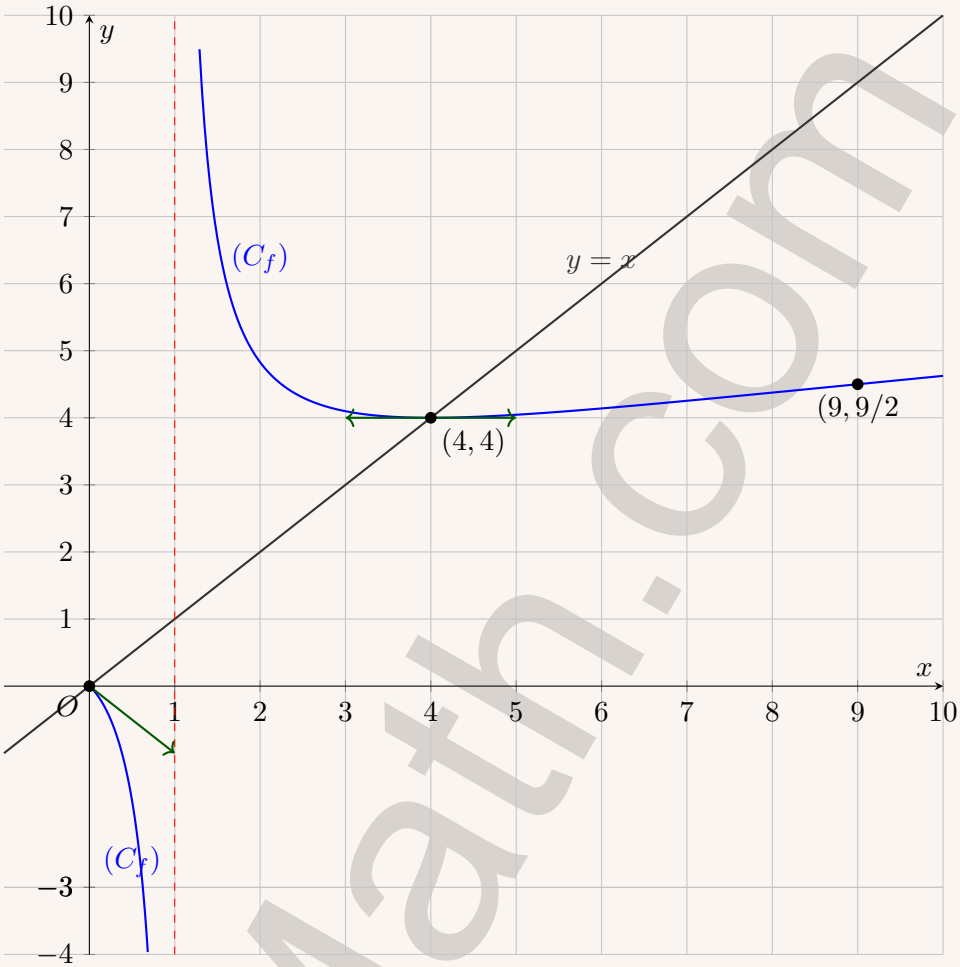
Valeurs remarquables : $f(0) = 0$, $f(4) = \dfrac{4}{2-1} = 4$, $f(9) = \dfrac{9}{2}$.

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	‖	↘	4	↗	$+\infty$
		$-\infty$	‖	$+\infty$			

DimaMath.com

7/ Tracé de $(\mathcal{C}_f)$

On utilise : asymptote verticale $x = 1$, branche parabolique de direction $(O;\vec{i})$ en $+\infty$, les points $O(0;0)$, $A(4;4)$ (point de tangente horizontale) et le point d'inflexion $I\left(9;\dfrac{9}{2}\right)$ (admis).



8/ Étude de g la restriction de f sur $[4;+\infty[$

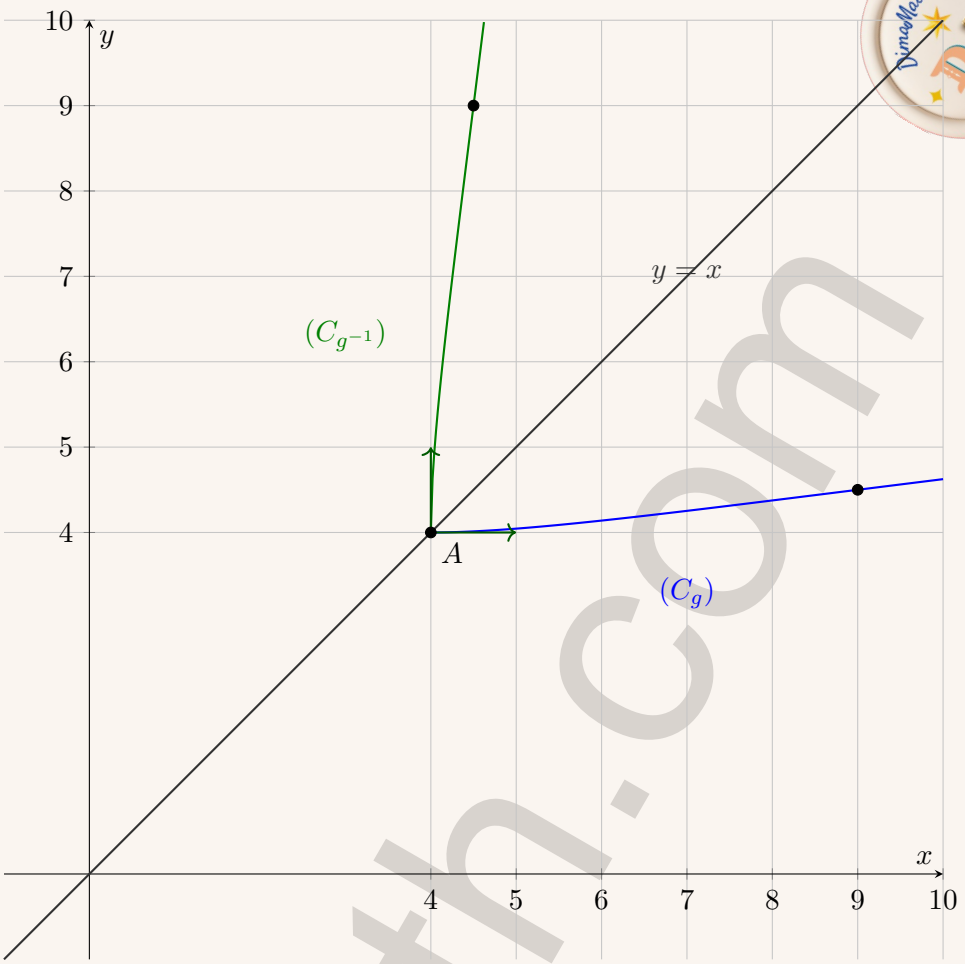
a) Sur $[4;+\infty[$, on a $f'(x) > 0$, donc g est continue et strictement croissante sur $[4;+\infty[$. Ainsi g réalise une bijection de $[4;+\infty[$ sur l'intervalle J tel que :

$$J = g\big([4;+\infty[\big) = \big[g(4);\lim_{x\to+\infty} g(x)\big[= [4;+\infty[.$$

Donc g **admet une fonction réciproque** g^{-1} **définie sur** $J = [4;+\infty[$.

b) La courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ est la symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à la droite $(D) : y = x$. Elle passe par $A(4;4)$ et par le point $\left(\dfrac{9}{2};9\right)$, symétrique de I... plus précisément symétrique du point $(9;\frac{9}{2})$ de $(\mathcal{C}_g)$.

DimaMath.com



c) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g^{-1}(x)}{x}$:

Pour $x \geq 4$, on a

$$y = g^{-1}(x) \iff x = g(y) \text{ donc } x \to +\infty \iff y \to +\infty$$

Par suite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{g(y)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{y} - 1 = \infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x} = +\infty}$$

Solution Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x}.$$

1/ Ensemble de définition

$$x \in D_f \iff x \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x} \geq 0$$

Dimamath.com

. Le tableau de signes de $\dfrac{x-1}{x}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc $\dfrac{x-1}{x} \geq 0$ sur $]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$. Ainsi

$$\boxed{D_f =]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[.}$$

2/ Limites de f aux bornes de D_f

- Limite en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 0 = 2$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$$

- Limite en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 0 = 2$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2}$$

- Limite en 0^-.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} = \lim_{x\to0^-} 2\sqrt{\frac{x(x-1)}{x^2}} + \frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x\to0^-} \frac{1-2\sqrt{x(x-1)}}{x} = -\infty$$

Car $\sqrt{x^2} = -x$ et $\lim\limits_{x\to0^-} 1-2\sqrt{x(x-1)} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty}$$

3/ Dérivabilité à droite en 1

On a $f(1) = 2\cdot 0 + 1 = 1$. Pour tout $x > 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} - 1}{x-1} = \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}}{x-1} + \frac{1-x}{x(x-1)} = \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} - \frac{1}{x}.$$

DimaMath.com

Or $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = +\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty}$$

Par conséquent la fonction f n'est donc pas dérivable à droite en 1,

Interprétation graphique : la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet à droite du point $A(1,1)$ une **demi-tangente verticale** dirigée vers le haut.

4/ Dérivée et tableau de variations

a) Calcul de $f'(x)$

Soit $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

$$f'(x) = 2\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right)}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\quad f'(x) = \frac{1}{x^2(x-1)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right)}}.$$

b) Tableau de variations

Puisque $\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $x^2\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1\right) > 0$, alors Le signe de f' est celui de $x-1$. Par suite

- sur $]-\infty,0[$: $x-1<0$, donc $f'(x)<0$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$.
- sur $]1,+\infty[$: $x-1>0$, donc $f'(x)>0$. donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	‖	$+$	
$f(x)$	2	↘	‖	‖	‖	↗	2
		$-\infty$	‖	‖	1		

5/ Intersection avec l'axe des abscisses et branches infinies

a) Intersection avec l'axe des abscisses :

Pour cela résolvons dans D_f l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire $2\sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{x}$.

Dimamath.com

Puisque $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \geq 0$ Il faut que $-\dfrac{1}{x} \geq 0$, soit $x < 0$.

En élevant au carré :

$$\frac{4(x-1)}{x} = \frac{1}{x^2} \iff 4x(x-1) = 1 \iff 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation du second degré $4x^2 - 4x - 1 = 0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 32 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$. Les solutions de cette équation sont : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

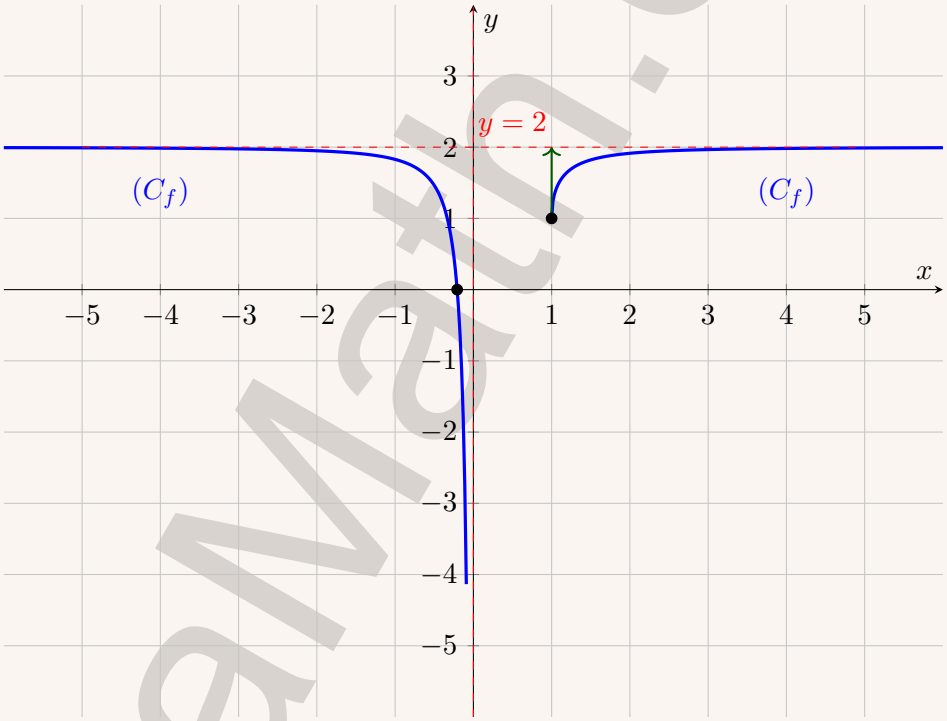
Seule $x_1 < 0$ convient.

Donc **la courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisse au point $A\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0\right)$**

b) Branches infinies

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une **asymptote horizontale** à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Puisque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$.

6/ Tracé de $(\mathcal{C}_f)$



7/ Restriction de f sur $I = [1, +\infty[$

a) Existence de g^{-1}

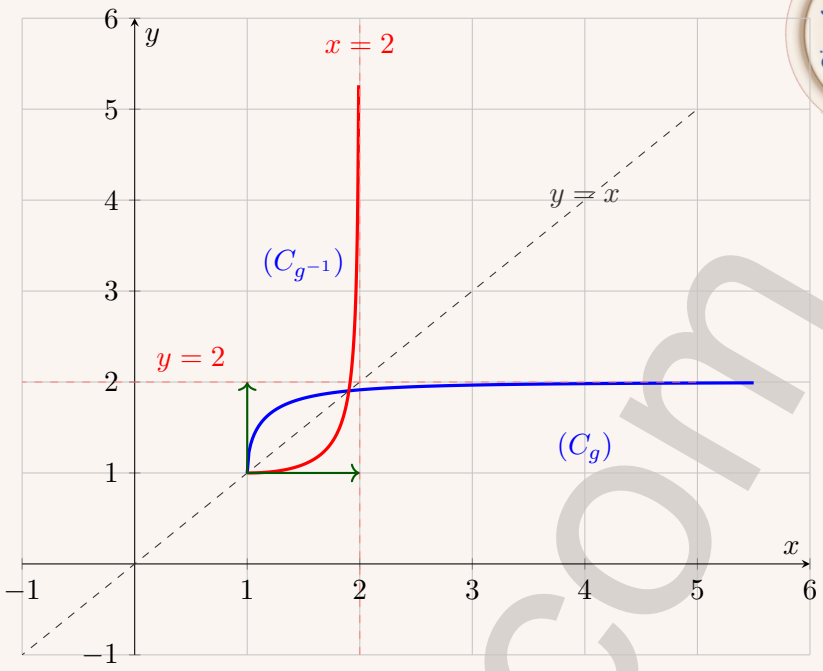
La fonction g est continue et strictement croissante sur $I = [1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de I sur $J = g(I) = [g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= [1, 2[$.

Ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [1, 2[$.

b) Tracé de $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$

La courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ est la symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à la droite $y = x$.

DimaMath.com



b) Détermination de $g^{-1}(x)$

Pour déterminer g^{-1}, soit $y \in [1,2[$ et $x \in I$ tel que $y = g(x)$. Posons $s = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \in [0,1[$.

Comme $\dfrac{1}{x} = 1 - s^2$:

$$y = 2s + 1 - s^2 \iff (s-1)^2 = 2 - y \iff s = 1 - \sqrt{2-y}$$

(on retient la racine $s < 1$). Donc

$$\frac{1}{x} = 1 - s^2 = 1 - \left(1 - \sqrt{2-y}\right)^2 = y - 2 + 2\sqrt{2-y} \iff x = \frac{1}{y - 2 + 2\sqrt{2-y}}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in [1,2[, \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}\left(2 - \sqrt{2-x}\right)}}.$$

Solution Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par : boldmath

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}.$$

1/ Ensemble de définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc $\sqrt{x^2+1}$ est toujours définie. La fonction f est définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}.$$

2/ Limites en 0 et interprétation graphique

DimaMath.com

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1} = -\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1} = +\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty}.$$

Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une **asymptote verticale** à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3/ Limites à l'infini

On écrit $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\sqrt{x^2+1}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x}\sqrt{x^2+1} = 1\times+\infty = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x}\sqrt{x^2+1} = 1\times+\infty = +\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}.$$

4/ Asymptotes obliques

Au voisinage de $+\infty$:

$$\forall x>0;\quad f(x)-(x-1) = \frac{x-1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-1)\big) = 0$.

Par conséquent **la droite d'équation $y = x-1$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.**

Au voisinage de $-\infty$:

$$\forall x<0;\quad f(x)-(-x+1) = f(x)+x-1 = \frac{x-1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(-x+1)\big) = 0$.

Par conséquent **la droite d'équation $y = -x+1$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.**

5/ Dérivée et variations

a) Calcul de $f'(x)$

Soit $x\in D_f$. On pose $u(x) = 1-\dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$. Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Donc

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} + \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

DimaMath.com

En réduisant au même dénominateur $x^2\sqrt{x^2+1}$:

$$f'(x) = u'v + uv' = \frac{(x^2+1)+x^2(x-1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\boxed{\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}}.$$

b) Tableau de variations

On a $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ avec $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x+1$ (car $x^2\sqrt{x^2+1} > 0$ sur D_f) :

- sur $]-\infty,-1[$: $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante ;
- sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$: $f'(x) > 0$, f est strictement croissante.

De plus $f(-1) = (1+1)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

6/ Représentation graphique de f

a) Tangente au point d'abscisse 1

On a $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1+1}{1\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. L'équation de la tangente (T) est $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, soit

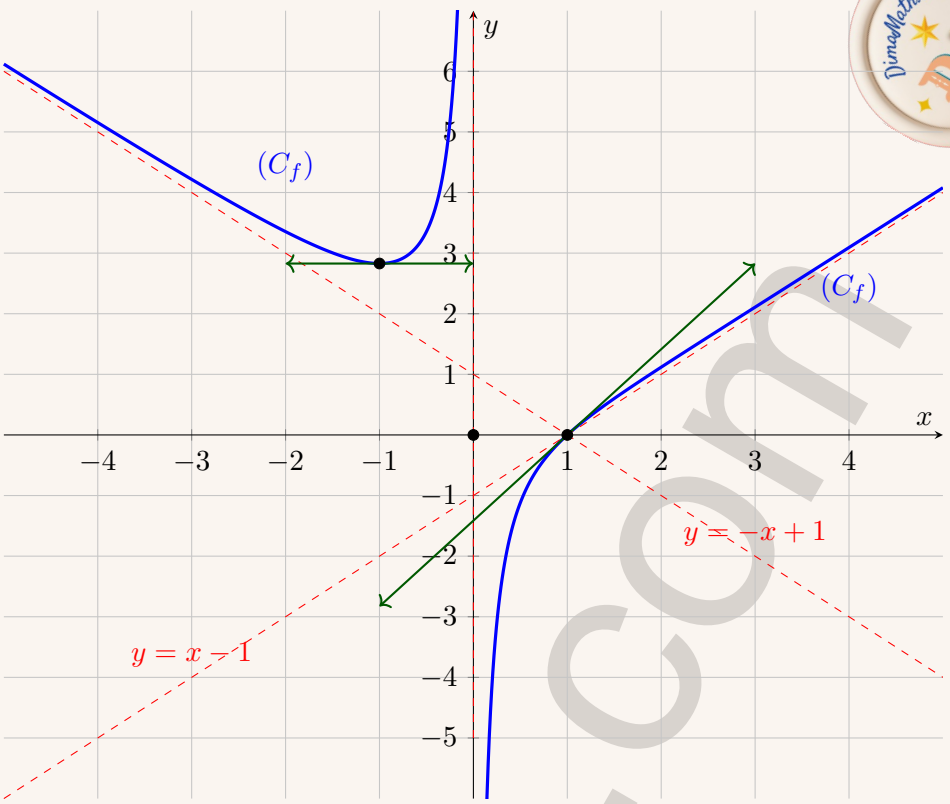
$$\boxed{(T) : \ y = \sqrt{2}\,(x-1)}.$$

b) Intersection avec l'axe des abscisses

$f(x) = 0 \iff \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ (car $\sqrt{x^2+1} > 0$), soit $x = 1$. Donc $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en $A(1,0)$.

c) Tracé de $(\mathcal{C}_f)$

DimaMath.com



7/ Restriction de f sur $]0, +\infty[$

Soit g la restriction de f à $]0, +\infty[$.

a) Existence de g^{-1}

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $f' > 0$ sur cet intervalle). De plus

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

Ainsi g **admet une fonction réciproque** g^{-1} **définie sur** $J = \mathbb{R}$

b) Calcul de $(g^{-1})'(0)$

Comme $g(1) = 0$, on a $g^{-1}(0) = 1$. La fonction g est dérivable en 1 avec $g'(1) = \sqrt{2} \neq 0$. Donc g^{-1} est dérivable en 0 et

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{(g^{-1})'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

c) Comparaison de $g^{-1}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ et $g^{-1}\left(\sqrt[4]{4}\right)$

La fonction g^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (réciproque d'une fonction strictement croissante). Il suffit donc de comparer $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[4]{4}$:

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 4^{\frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad \sqrt[4]{4} = 4^{1/4} = 2^{1/2} = 8^{\frac{1}{6}}.$$

Comme $4 < 8$ et $2 > 1$, on a $4^{1/6} < 8^{1/6}$. Donc $\sqrt[3]{2} < \sqrt[4]{4}$, d'où :

$$\boxed{g^{-1}\left(\sqrt[3]{2}\right) < g^{-1}\left(\sqrt[4]{4}\right)}.$$

Dimamath.com

Solution Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Ensemble de définition

$$x \in D_f \iff \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0$$

On résout l'inéquation $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ en utilisant le tableau de signe :

On a $x+1=0 \iff x=-1$ et $x-1=0 \iff x=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Alors $\mathcal{S} =]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$. D'où

$$\boxed{D_f =]-\infty\,;-1[\cup[1\,;+\infty[}.$$

b) Limite en -1^-

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x+1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty}$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote verticale à (C_f).

2/ a) Limites en $\pm\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x+1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x\to +\infty} x+1+\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = +\infty+1=+\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x+1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x\to -\infty} x+1+\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = -\infty+1=-\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$$

DimaMath.com

b) Asymptote oblique $(\Delta) : y = x + 2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

De même

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Donc la droite (Δ) est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

c) Position relative de (C_f) et (Δ)

Soit $x \in D_f$, $f(x) - (x+2) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1 = \dfrac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \dfrac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}$

Puisque $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1 > 0$ pour tout $x \in D_f$, alors le signe de $f(x) - (x+2)$ est le signe contraire de $x + 1$.

- Si $x < -1$, alors $f(x) - (x+2) > 0$ et (C_f) est **au-dessus** de (Δ).
- Si $x \geq 1$, alors $f(x) - (x+2) < 0$ et (C_f) est **en dessous** de (Δ).
- Puisque $-2 \neq 0$, alors la courbe (C_f) et la droite (Δ) ne se coupent en aucun point.

3/ **a)** Dérivabilité à droite en 1

On a $f(1) = 2$ et pour tout $x > 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x + 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = +\infty$$

Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x\to1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty}$$

Donc : f **n'est pas dérivable à droite en** 1.

Interprétation graphique : (C_f) admet à droite du point $A(1\,;2)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

b) Calcul de $f'(x)$ Sur $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}} = 1 + \frac{2}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

DimaMath.com

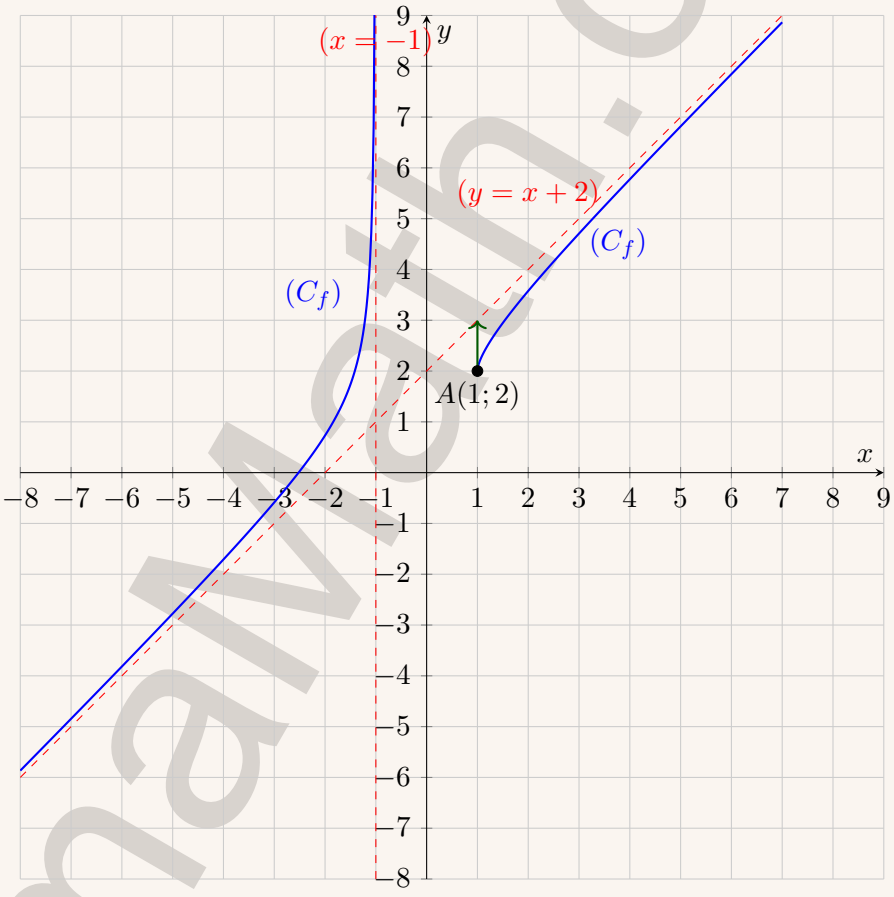
c) Tableau de variations

Pour tout $x \in D_f$, $\dfrac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} > 0$. Donc $f'(x) > 0$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $[1\,;+\infty[$. La fonction f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $[1\,;+\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

4/ construction de (C_f) et (Δ)



5/ **a)** Réciproque de g

La fonction g est la restriction de f à $I = [1\,;+\infty[$.

Sur I la fonction f est continue et strictement croissante. Donc g est continue et strictement croissante sur I. Elle admet donc une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J tel que :

$$J = g(I) = \left[g(1)\,;\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [\,;+\infty[\,.$$

Dimamath.com

Ainsi g **admet une fonction réciproque** g^{-1} **définie sur** $J = [2\,;+\infty[$**.**

b) Calcul de $g\left(\frac{5}{3}\right)$ et déduction de $g^{-1}\left(\frac{19}{6}\right)$ On a

$$g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} + 1 + \sqrt{\frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{5}{3}+1}} = \frac{5}{3} + 1 + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{19}{6}$$

Ainsi

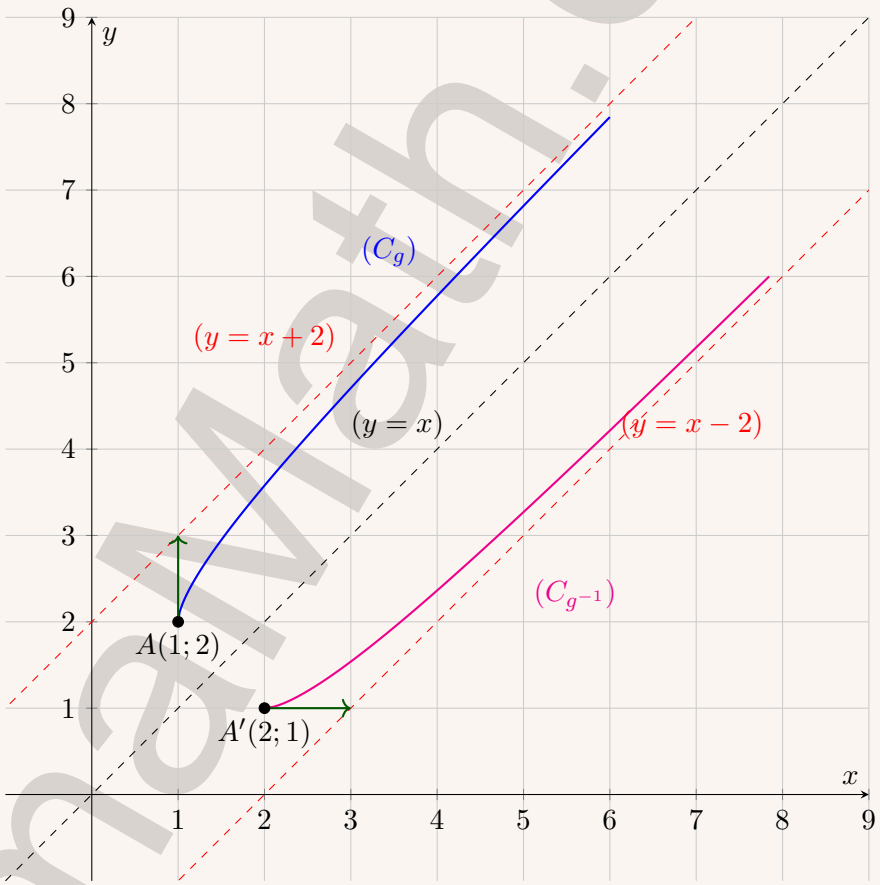
$$\boxed{g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{19}{6}.}$$

Par conséquent

$$\boxed{g^{-1}\left(\frac{19}{6}\right) = \frac{5}{3}}$$

.

c) Courbe de g^{-1} La courbe $(C_{g^{-1}})$ est la symétrique de (C_g) par rapport à la droite $y = x$. Ses points sont de la forme $(g(x)\,;x)$ avec $x \in [1\,;+\infty[$.



Dimamath.com

Solution Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \dfrac{2}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1/ a) Continuité en $x_0 = 1$.

Limite à gauche : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-x + \dfrac{2}{x}\right) = -1 + 2 = 1.$

Limite à droite : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1+1}{2\sqrt{1}} = 1.$

De plus $f(1) = \dfrac{1+1}{2\sqrt{1}} = 1.$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$. Alors **la fonction f est donc continue en 1.**

b) Calcul des Valeurs.

$$f(-2) = -(-2) + \frac{2}{-2} = 2 - 1 = 1$$
$$f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{2}{-\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$
$$f(-1) = 1 - 2 = -1$$
$$f(1) = 1$$
$$f(4) = \frac{1+4}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{4}$$

2/ a) Dérivabilité à gauche en 1.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x + \frac{2}{x} - 1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x-2}{x}$$
$$= -3$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -3}$$

Donc la fonction f est dérivable à gauche en 1 et $f'_d(1) = -3$

b) Demi-tangente à gauche.

$(\Delta_1) : y = f'_g(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) + 1$ et $x \leq 1$, soit

$$\boxed{(\Delta_1) : y = -3x + 4 \qquad (x \leq 1)}.$$

c) Dérivabilité à droite en 1.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$
$$= 0$$

DimaMath.com

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0}$$

Donc f **est dérivable à droite en** 1 **et** $f'_d(1)=0$**.**

Interprétation graphique : La courbe (C_f) admet à droite du point d'abscisse 1 une demi tangente horizontale.

Remarque : La fonction f n'est pas dérivable en 1 car $f'_d(1)\neq f'_g(1)$. La courbe (C_f) admet un point anguleux d'abscisse 1.

3/ a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty.$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+\frac{2}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{2}{x^2}=-1$ Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0.$ Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=0}$

Par conséquent : **La droite** $(D): y=-x$ **est une asymptote oblique à** (C_f) **au voisinage de** $-\infty$.

4/ a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}=0+\infty=+\infty$

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

b) Étude de la branche infinie au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$$

Alors **la courbe** (C_f) **admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de** $+\infty$.

5/ Au voisinage de 0 :

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty.$$

Alors **la courbe** (C_f) **admet une asymptote verticale d'équation** $x=0$.

6/ a) Dérivée.

- Sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$ $\quad f(x)=-x+\frac{2}{x}$. Donc pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]0,1[$:

$$\boxed{f'(x)=-1-\frac{2}{x^2}}$$

- Sur $[1,+\infty[$ $\quad f(x)=\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$. Donc pour tout $x\in[1,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{(1+x)'2\sqrt{x}-(2\sqrt{x})'(1+x)}{(2\sqrt{x})^2}=\frac{2\sqrt{x}-\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{2x-(1+x)}{4x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$$

Soit

$$\boxed{f'(x)=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}}$$

D'où :

$$\begin{cases} f'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2} & \text{si} \quad x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ f'(x)=\dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}} & \text{si} \quad x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

b) Variations.

- Sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$, on a $f'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2}<0$, donc f **est strictement décroissante sur** $]-\infty,0[$ **et sur** $]0,1[$.
- Sur $[1,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $x-1$:donc $f'(1)=0$ et $f'(x)>0$ pour $x>1$. Donc f **est strictement croissante sur** $[1,+\infty[$**.**

Tableau de variation de f

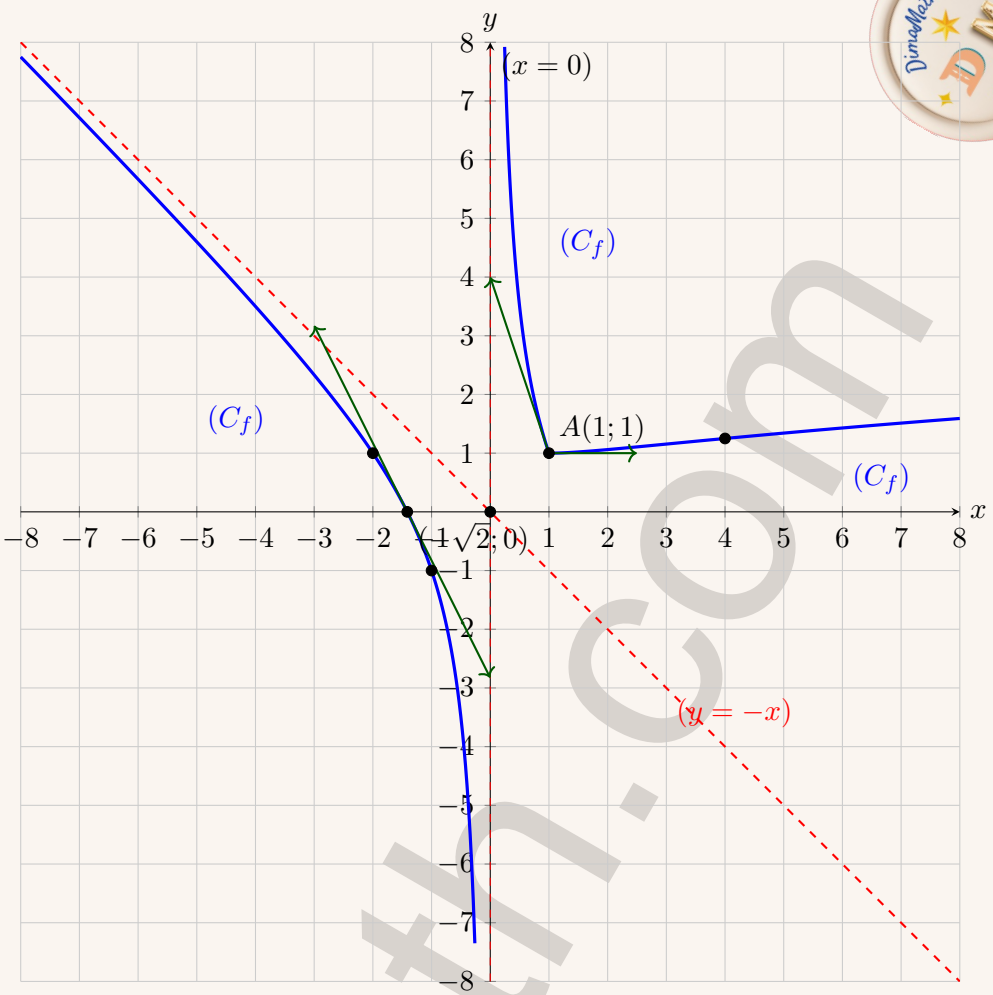
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

7/ **a)** L'ordonnée du point d'abscisse $-\sqrt{2}$ est $f(-\sqrt{2})=0$ et le nombre dérivé est $f'(-\sqrt{2})=-1-\dfrac{2}{2}=-2$. Donc $(\Delta_2): y=-2\left(x+\sqrt{2}\right)+0$ soit

$$\boxed{(\Delta_2): y=-2x-2\sqrt{2}}$$

b) Construction (dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$) :

Dimamath.com



8/ Soit g la restriction de f à $]-\infty,0[$: $g(x)=-x+\dfrac{2}{x}$.

a) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ (car $g'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2}<0$).
De plus

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} g(x)=-\infty.$$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J=g\left(]-\infty,0[\right)=\mathbb{R}$.

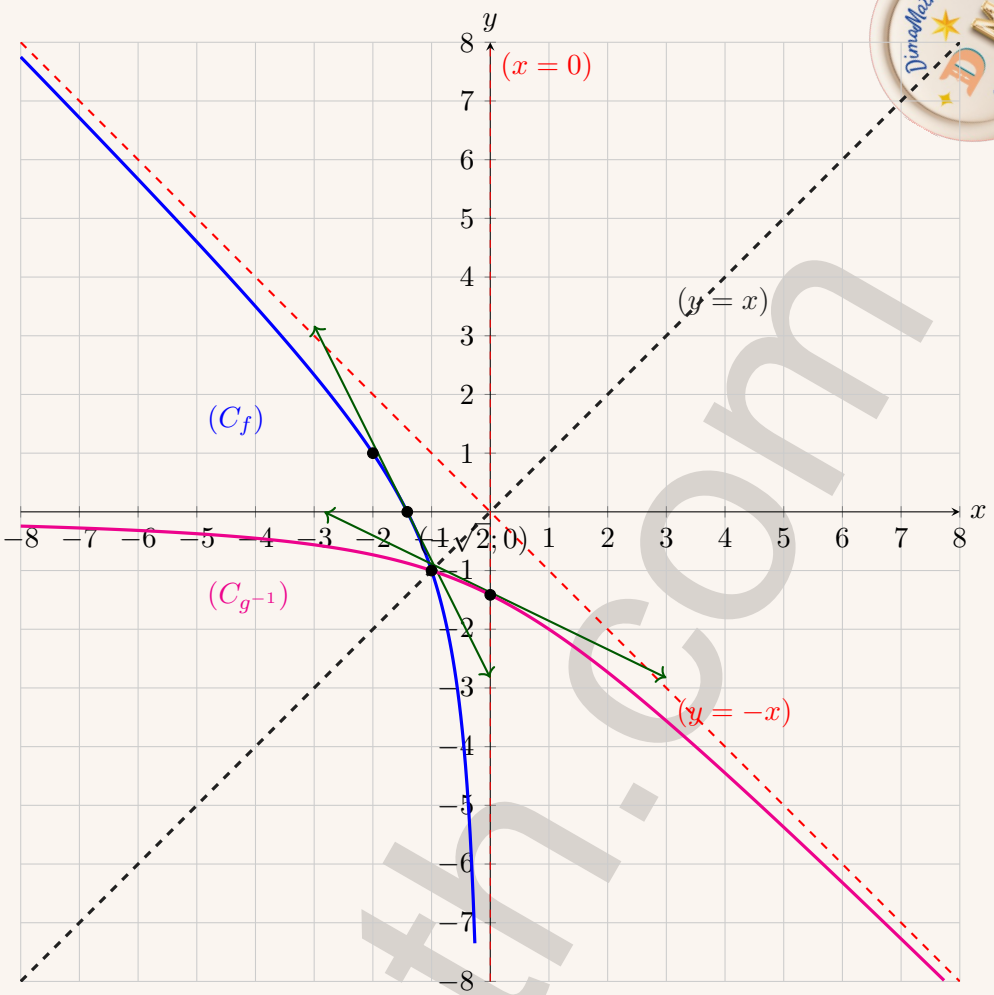
b) On a $g(-\sqrt{2})=0$, donc

$$g^{-1}(0)=-\sqrt{2}.$$

c) Construction. La courbe $(C_{g^{-1}})$ est symétrique de (C_g) par rapport à la droite $y=x$. On en déduit :

- la droite (D) : $y=-x$ reste asymptote oblique de $(C_{g^{-1}})$ en $+\infty$;
- l'asymptote verticale $x=0$ de (C_g) devient l'asymptote horizontale $y=0$ de $(C_{g^{-1}})$ en $-\infty$;
- le point $(-\sqrt{2};0)$ de (C_g) devient le point $(0;-\sqrt{2})$ de $(C_{g^{-1}})$.

DimaMath.com



d) Expression de $g^{-1}(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-\infty, 0[$

$$y = g^{-1}(x) \iff g(y) = x \iff -y + \frac{2}{y} = x \iff y^2 + xy - 2 = 0.$$

On a une équation du second degré dont l'inconnue est y. Son discriminant est $\Delta = x^2+8 > 0$, et les racines sont $\dfrac{-x \pm \sqrt{x^2+8}}{2}$. Leur produit vaut $-2 < 0$: une racine est positive et l'autre négative. Comme $y < 0$, on retient la racine négative c'est-à-dire $y = \dfrac{-x - \sqrt{x^2+8}}{2}$. D'où :

$$g^{-1}(x) = \frac{-x - \sqrt{x^2+8}}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On vérifie bien $g^{-1}(0) = \dfrac{-\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$.

Dimamath.com

Solution Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 1 - \sqrt{x - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Partie A : Continuité et dérivabilité

1/ a) Limite à gauche en 1

Pour $x < 1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$. Comme $\lim_{x\to 1^-}(x^2 - 3x) = 1 - 3 = -2$ et $\lim_{x\to 1^-}(x - 1) = 0^-$. Alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x}{x-} = +\infty$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$$

b) Continuité en $x_0 = 1$ On a : $f(1) = 1$

- À droite : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(1 - \sqrt{x - 1}\right) = 1 = f(1)$. Donc **La fonction f est continue à droite en** 1.
- À gauche :On a $1 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \neq f(1)$. Alors **La fonction f n'est pas continue à gauche en** 1.

Conclusion : f n'est pas continue en $x_0 = 1$ et la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe à gauche.

2/ a) Dérivabilité à gauche en 1 La fonction f n'est pas définie à gauche en 1 donc elle n'est pas dérivable à gauche en 1.

b) Dérivabilité à droite en 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1 - \sqrt{x - 1} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\sqrt{x - 1}}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\sqrt{x - 1}} = -\infty.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty}$$

Alors la fonction f n'est pas dérivable à droite en 1.

Interprétation graphique : la courbe admet à droite du point $(1, 1)$ une demi-tangente verticale, dirigée vers le bas.

c) f est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

Non , car elle n'est pas dérivable à gauche en 1.

Partie B : Limites et branches infinies

1/ a) Limite en $-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)}{1 - \dfrac{1}{x}}$$
$$= -\infty \times 1 = -\infty.$$

DimaMath.com

Car $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$$

b) Asymptote oblique en $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}((x)-(x-2)) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-(x-2)(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-(x^2-3x+2)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-1}=0\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-2))=0}$$

.

Par conséquent **la droite** (D) **d'équation** $y=x-2$ **est une asymptote oblique à** (C_f) **au voisinage de** $-\infty$.

De plus, pour $x<1$, $\dfrac{-2}{x-1}>0$: la courbe est au-dessus de (D) sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

2/ **a)** Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{x-1}\right)=-\infty.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$$

.

b) Branche infinie en $+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x-1}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{x-1}}=0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$$

. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, alors **la courbe** (C_f) **admet une branche parabolique de direction des abscisses au voisinage de** $+\infty$.

Partie C : Variations et construction

1/ **a)** Dérivée pour $x<1$

Pour $x<1$, on pose $u(x)=x^2-3x$ et $v(x)=x-1$, donc $u'(x)=2x-3$ et $v'(x)=1$, alors :

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2} &= \frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{2x^2-5x+3-x^2+3x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

DimaMath.com

Ainsi pour tout $x < 1$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}}$$

b) Dérivée pour $x > 1$

Pour $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Ainsi, pour tout $x > 1$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}$$

2/ Tableau de variations

- Le discriminant de $x^2 - 2x + 3$ est $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, donc $x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout x. Par conséquent : sur $]-\infty; 1[$: $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante ;
- sur $]1; +\infty[$: $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante.

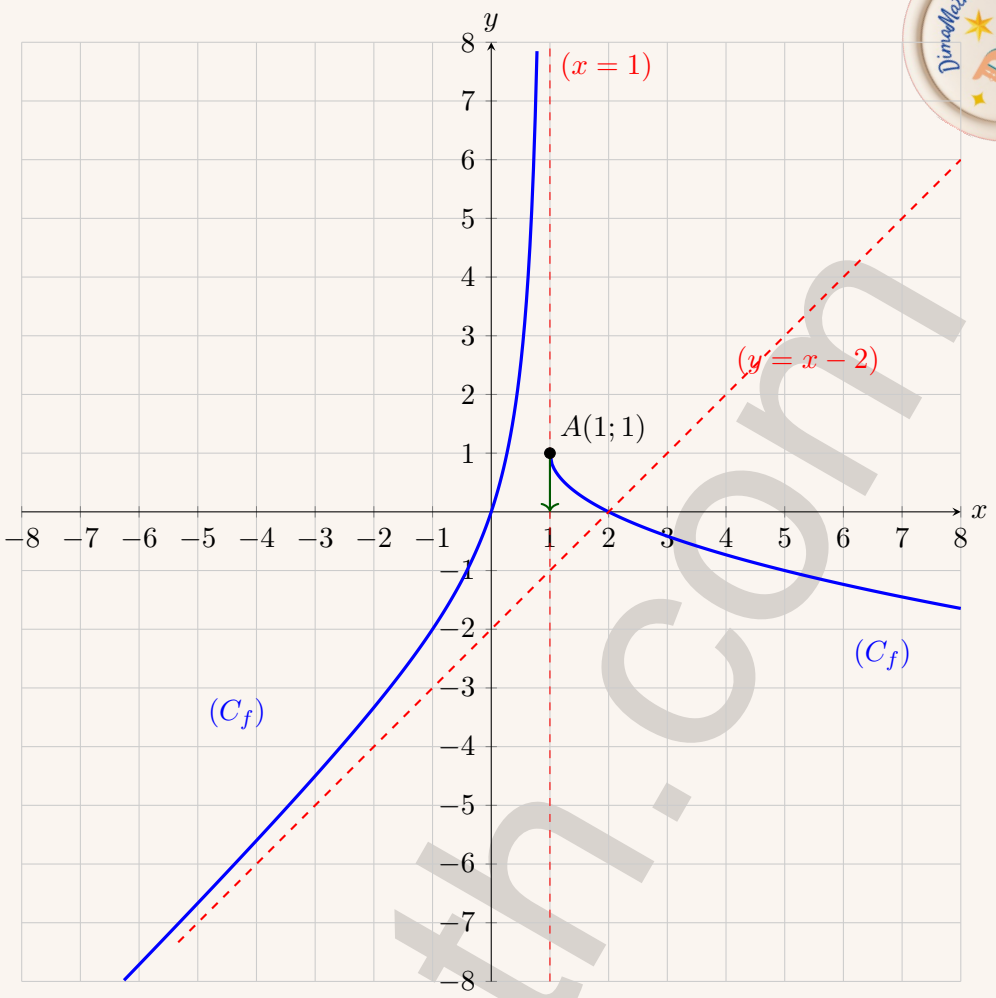
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $\|\|$ 1	↘	$-\infty$

3/ Construction de la courbe C_f

Les éléments à tracer sont :

- l'asymptote verticale d'équation $x = 1$ (côté gauche) ;
- l'asymptote oblique $(D) : y = x - 2$ (au voisinage de $-\infty$) ;
- au point $A(1; 1)$: une demi-tangente verticale à droite, dirigée vers le bas ;
- la courbe (C_f)

DimaMath.com



Partie D : Fonction réciproque

Soit g la restriction de f à $I = [1; +\infty[$:

$$g(x) = 1 - \sqrt{x-1}.$$

1/ Existence de g^{-1}

g est continue et strictement décroissante sur I , donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)\right] =]-\infty, 1]$.

2/ Calcul de $g(2)$ et de $(g^{-1})'(0)$

$$g(2) = 1 - \sqrt{2-1} = 1 - 1 = 0.$$

Donc $g^{-1}(0) = 2$.

Comme $g'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x-1}}$, on a $g'(2) = -\dfrac{1}{2} \neq 0$. D'après la formule de dérivation de la réciproque :

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

Alors :

$$\boxed{\boldsymbol{g(2) = 0 \quad \text{et} \quad \left(g^{-1}\right)'(0) = -2}}$$

DimaMath.com

3/ Expression de $g^{-1}(x)$

Soit $x \in J$ et $y \in I$. Alors

$$\begin{aligned} y = g^{-1}(x) &\iff x = g(y) \iff x = 1 - \sqrt{y-1} \\ &\iff \sqrt{y-1} = 1 - x \iff y - 1 = (1-x)^2 \\ &\iff y = 1 + (1-x)^2 \end{aligned}$$

car $1 - x \geq 0$, D'où pour tout $x \in J =]-\infty; 1]$:

$$\boxed{g^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2}.$$

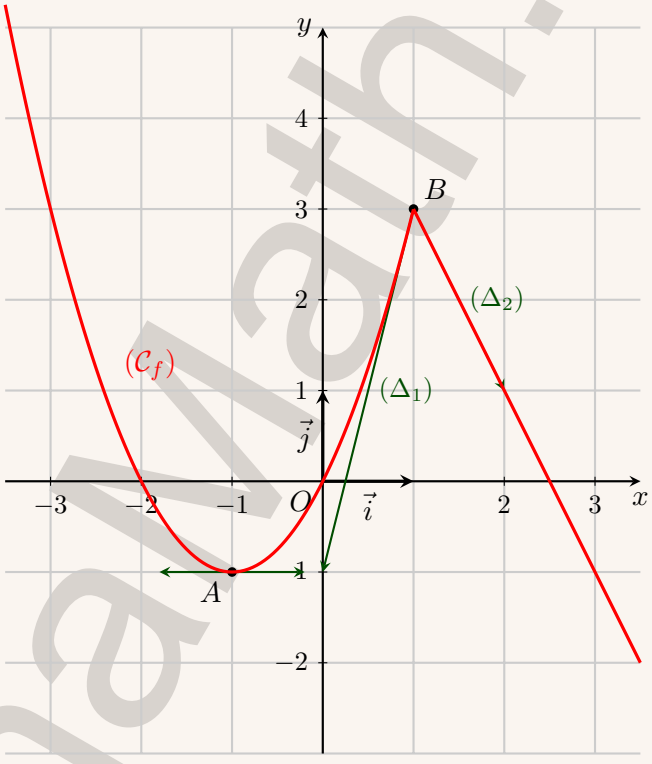
Vérifications : $g^{-1}(0) = 2$ et $g^{-1}(1) = 1$, ce qui est cohérent avec $g(2) = 0$ et $g(1) = 1$.

Interprétation économique : $g^{-1}(x)$ donne la quantité demandée (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire fixé x (en centaines de dirhams).

Solution Exercice 9

Partie A : Lecture graphique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de sa courbe (C_f) suivante :



1/ Images par lecture graphique :

- $f(-2) = 0$
- $f(-1) = -1$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = 3$

2/ Antécédents du nombre 0 :

Graphiquement, la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en trois points. Le nombre 0 admet donc

Dimamath.com

3 **antécédents** par la fonction f, qui sont :

$$-2 \quad ; \quad 0 \quad \text{et} \quad 2{,}5 \left(\text{ou } \frac{5}{2}\right).$$

3/ Nombres dérivés :

a) Au point $A(-1;-1)$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale, donc son coefficient directeur est nul :

$$f'(-1) = 0.$$

b)

- Le nombre dérivé à gauche en 1, noté $f'_g(1)$, correspond au coefficient directeur de la demi-tangente (Δ_1) passant par $B(1;3)$ et par le point de coordonnées $(0;-1)$:

$$f'_g(1) = \frac{3-(-1)}{1-0} = 4.$$

- Le nombre dérivé à droite en 1, noté $f'_d(1)$, correspond au coefficient directeur de la demi-tangente (Δ_2) passant par $B(1;3)$ et par le point de coordonnées $(2;1)$:

$$f'_d(1) = \frac{1-3}{2-1} = -2.$$

4/ Équations réduites des tangentes :

a) La tangente horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(-1;-1)$ a pour équation réduite :

$$y = -1.$$

b) La demi-tangente à droite (Δ_2) au point $B(1;3)$ a pour équation réduite $y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$, soit :

$$y = -2(x-1)+3 \iff y = -2x+5 \quad (\text{pour } x \geq 1).$$

Partie B : Étude analytique de la fonction

L'expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par sa courbe représentative dans la partie A est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x} & \text{si } \boldsymbol{x \leq 1} \\ \boldsymbol{f(x) = 5 - 2x} & \text{si } \boldsymbol{x > 1} \end{cases}$$

1/ Continuité en $x_0 = 1$: On a $f(1) = 3$

a) Pour $x \leq 1$, $f(x) = x^2 + 2x$. On a donc :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2x) = 1^2 + 2 \times 1 = 3 = f(1)$$

b) Pour $x > 1$, $f(x) = 5 - 2x$. On a donc :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (5 - 2x) = 5 - 2 \times 1 = 3 = f(1)$$

Puisque $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 3$, alors **la fonction f est continue au point $x_0 = 1$.**

2/ Dérivabilité en $x_0 = 1$:

DimaMath.com

a) Dérivabilité à gauche en 1 :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+3)=4.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4}$$

Donc la fonction f est dérivable à gauche en 1 et on retrouve bien $f'_g(1)=4$.

b) Dérivabilité à droite en 1 :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{5-2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2(x-1)}{x-1}=-2.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite en 1 et on retrouve bien $f'_d(1)=-2$.

c) Interprétation géométrique :

Comme $f'_g(1)\neq f'_d(1)$ $(4\neq -2)$, la fonction f n'est pas dérivable en 1 et géométriquement, le point $B(1;3)$ est un **point anguleux** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3/ Limites en $-\infty$ et en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(5-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$.

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$$

4/ Dérivée et variations de f :

a) Calcul de $f'(x)$:

- Sur $]-\infty;1[$, f est une fonction polynôme donc dérivable, et pour tout $x\in]-\infty;1[$:

$$\boxed{f'(x)=2x+2}.$$

- Sur $]1;+\infty[$, f est une fonction affine donc dérivable, et pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$\boxed{f'(x)=-2}.$$

b) Signe de $f'(x)$ et tableau de variation :

- Sur $]-\infty;1[$, $f'(x)=2(x+1)$ s'annule en $x=-1$. Elle est strictement négative sur $]-\infty;-1[$ et strictement positive sur $]-1;1[$.
- Sur $]1;+\infty[$, $f'(x)=-2<0$, donc $f'(x)$ est strictement négative.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

DimaMath.com