# Série 4

## Dérivation et ses applications

2 BIOF PC et SVT — S. EL JAAFARI

## Énoncés des exercices

### Exercice 1

On considère la fonction $f$, définie par son tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ \| $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

Et vérifiant les conditions suivantes :

- $f(-6)=2$ et $f(-5)=-1$ et $f(-2)=-4$.
- $f(0)=0$ et $f(4)=-1$ et $f(5)=-4$.
- $(C_f)$ admet une tangente horizontale au point $-4$.
- $(C_f)$ admet une demi-tangente horizontale à gauche au point 3. $(C_f)$ admet une demi-tangente verticale à droite au point 3.
- $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(Ox)$ au voisinage de $-\infty$, et admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$.
- La droite $(\Delta)$ d'équation $y=2x$ est une tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse 0.

1/ Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de $f$.

2/ Construire $(C_f)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3/ Déterminer $f\left(]-\infty,-4]\right)$ et $f\left([0,4]\right)$ et $f\left([3,+\infty[\right)$.

4/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]-6,-5[$.

5/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\beta$ dans l'intervalle $]3,4[$.

6/ Déterminer graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation $f(x)>0$.

7/ Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$.

8/ Discuter suivant les valeurs du nombre réel $m$ le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

DimaMath.com

9/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

10/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Justifier.

11/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{f(x)+2}{x+4}$. Justifier.

12/ Déterminer $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{f(x)-2}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{f(x)-2}{x-3}$. Justifier.

13/ Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x}$. Justifier.

## Exercice 2

### Partie I :

Soit $g$ la fonction définie par :

$$g(x) = x - 3 + 4\sqrt{x+2}$$

1/ a) Déterminer $D_g$ l'ensemble de définition de la fonction $g$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2/ Étudier la dérivabilité de $g$ à droite en $-2$ et interpréter géométriquement le résultat.

3/ a) Montrer que $g$ est dérivable sur $]-2;+\infty[$.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in ]-2;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de $g$.

4/ Déterminer le signe de $g(x)$.

### Partie II :

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x+2}+2}$$

et $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1/ a) Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ a) Étudier la dérivabilité de $f$ en $-2$ à droite et interpréter géométriquement le résultat.

b) Montrer que $f$ est dérivable sur $D'_f$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D'_f$.

d) Dresser le tableau de variation de $f$.

## Exercice 3

On considère la fonction $f$ définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2-x}$$

DimaMath.com

$(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ (a) Montrer que :

$$(\forall x>1);\quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

(b) Étudier la dérivabilité de la fonction $f$ à droite en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ Montrer que :

$$(\forall x>1);\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

4/ Donner le tableau de variation de $f$.

5/ Montrer que la courbe $(C_f)$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $\alpha$ tel que $1<\alpha<\frac{3}{2}$.

## Exercice 4

### Partie 1 :

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=6x-8x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$$

1/ Montrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ :

$$g'(x)=6(1-2\sqrt{x})$$

2/ Dresser le tableau de variations de $g$.

3/ En déduire que pour tout $x\in[0;+\infty[$ : $g(x)\leq 0$.

### Partie 2 :

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+1$$

et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

Et interpréter le résultat graphiquement.

3/ a) Montrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x}}$$

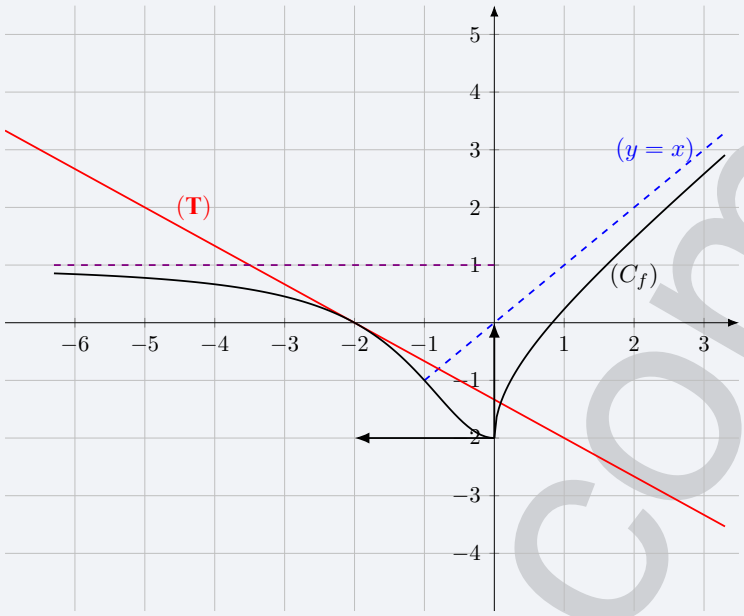
b) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

4/ Calculer $f(1)$ et tracer la courbe $(C_f)$.

DimaMath.com

## Exercice 5

**I -** Dans le graphique ci-contre $(C_f)$, est la courbe d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.




1/ Par lecture graphique déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)\ ;\quad f(0)\ ;\quad f'_d(0)\ ;\quad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)+2}{x}\right).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x).$$

2/ La droite $(T)$ passe-t-elle par le point $A\left(18, -\frac{40}{3}\right)$ ? Justifier.

**II -** On suppose dans la suite, la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2+2} & \text{Si : } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x^2+4x}-2 & \text{Si : } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1/ Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

2/ a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]-\infty, 0[$.

b) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in ]0, +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

3/ a) Donner l'équation de la tangente $(T_1)$ à $(C_f)$ au point d'abscisse 1.

b) Existe-t-il une tangente à $(C_f)$ parallèle à la droite d'équation $y = x$ ?

Dimamath.com

## Exercice 6

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

2/ a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$.

b) En déduire que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c) Déterminer la position relative de $(\Delta)$ et $(C_f)$.

d) Construire $(\Delta)$ et $(C_f)$.

3/ Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$.

4/ Soit la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(x) = f(2 - x)$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ; $\varphi(x) = 2 - f(x)$.

b) Tracer $(C_\varphi)$ à partir de $(C_f)$.

5/ On considère la fonction $g$ définie par : $g(x) = a\sqrt{x} + b$ où $a$ et $b$ sont deux réels données. La droite $\Delta' : y = x - 3$ est tangente à $(C_g)$ au point d'abscisse 1.

a) Déterminer $a$ et $b$.

b) Donner une valeur approchée de $g(1{,}001)$.

6/ Dans la suite on prend $a = 2$ et $b = -4$.

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ h(x) = g(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $h$ est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de $h$ à droite et à gauche en 0.

c) Dresser le tableau de variation de $h$.

## Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x - 1$$

1/ Calculer la limite de la fonction $f$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

2/ Justifier la continuité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

DimaMath.com

3/ a) Montrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\sqrt{x}-1$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$, puis dresser le tableau de variation complet de la fonction $f$.

4/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[0,+\infty[$ et vérifier que $3<\alpha<4$.

5/ a) En utilisant une calculatrice, calculer $f(3.6)$ et $f(3.7)$. En déduire un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0.1$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

6/ a) Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ à l'intervalle $[1,+\infty[$. Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

b) Calculer $g(4)$. Montrer que la fonction $g^{-1}$ est dérivable en $\frac{1}{3}$ et calculer $(g^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$.

## Exercice 8

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x^2-4x+5}; & x\leq 2 \\ f(x)=x-1+2\sqrt{x-2}; & x>2 \end{cases}$$

1/ a) Montrer que $(\forall x\leq 2); f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2+1}$ et $(\forall x>2); f(x)=(\sqrt{x-2}+1)^2$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ Étudier la continuité de $f$ en $x_0=2$.

3/ Étudier la dérivabilité de $f$ en $x_0=2$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

4/ Calculer $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-4}{x-3}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5/ Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse 3.

6/ a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

b) Montrer que $(\forall x\in]-\infty;2])$ : $f'(x)=\dfrac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+5)^2}}$

c) Montrer que $f$ est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de $f$.

7/ Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty;2]$.

a) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]1;2[$.

b) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ qu'il faut déterminer.

c) Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en $\alpha$.

d) Montrer que $(g^{-1})'(\alpha)=\dfrac{3\alpha^2}{2(\alpha-2)}$.

e) Montrer que : $(\forall x\in J)$ : $g^{-1}(x)=-\sqrt{x^3-1}+2$.

Dimamath.com

## Exercice 9

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

**1/** **a)** Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$.

**b)** Trouver les limites de $f$ aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition.

**2/** **a)** Montrer que $(\Delta)$ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**b)** Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\Delta)$.

**3/** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en $0$ et donner une interprétation graphique du résultat.

**4/** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$, puis dresser le tableau de variation de $f$.

**5/** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ tel que $2\sqrt{2} < \alpha < \frac{27}{8}$.

**6/** Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]1, +\infty[$.

**a)** Montrer que la fonction $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

**b)** Montrer que : $g^{-1}(6) = 8$.

**c)** Montrer que la fonction $g^{-1}$ est dérivable au point $y_0 = 6$.

**d)** Calculer $(g^{-1})'(6)$.

**7/** Tracer $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ et $(\Delta)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

DimaMath.com

# Corrigés des exercices

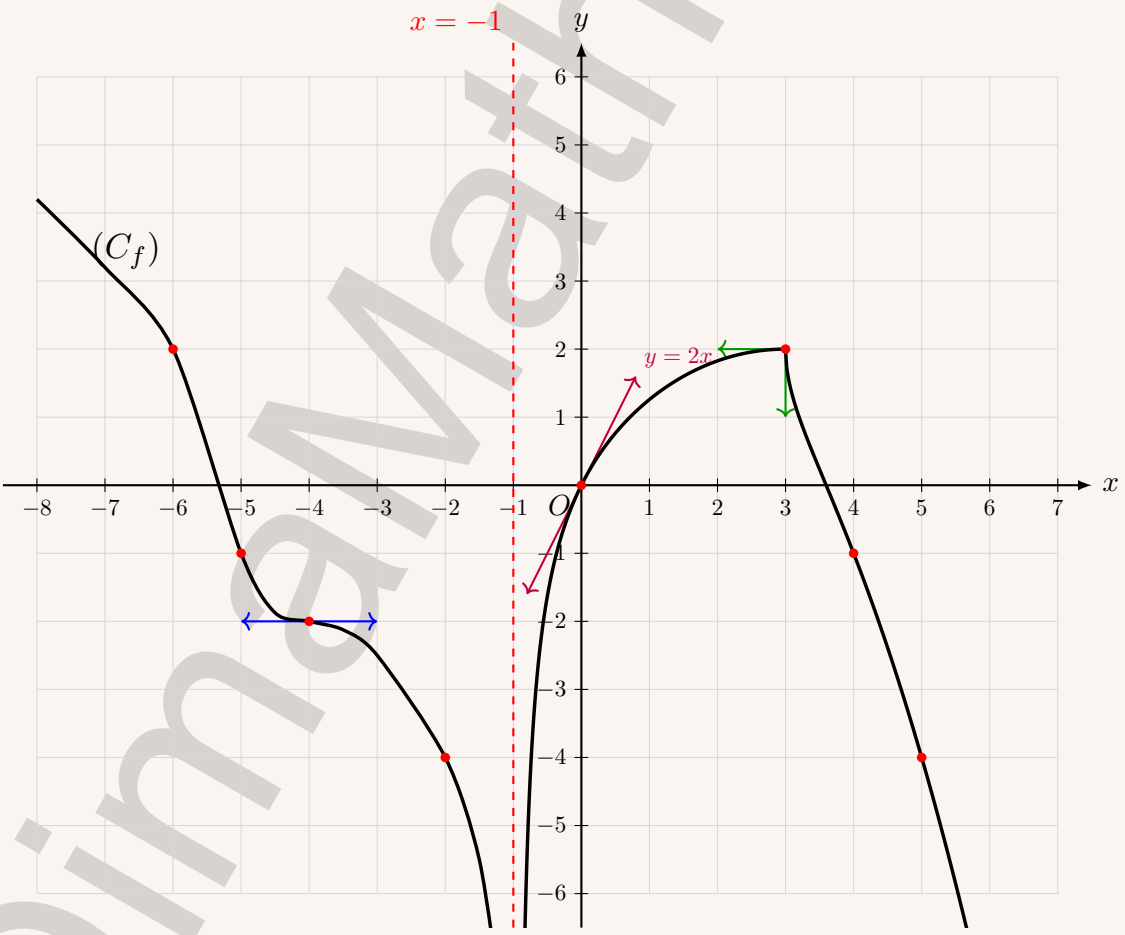
## Solution Exercice 1

1. Ensemble de définition de $f$ D'après le tableau de variations, la fonction présente une double barre verticale en $x = -1$, ce qui indique qu'elle n'est pas définie en ce point. Aucune autre restriction n'est présente sur les intervalles de lecture.

$$D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[ = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. Représentation graphique de $(C_f)$ Voici les éléments clés pris en compte pour le tracé :

- **Asymptote verticale :** La droite d'équation $x = -1$ car $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.
- **Points remarquables :** $(-6, 2)$, $(-5, -1)$, $(-4, -2)$, $(-2, -4)$, $(0, 0)$, $(4, -1)$ et $(5, -4)$.
- **Tangentes et demi-tangentes :**
  - Une tangente horizontale au point $A(-4, -2)$.
  - Une tangente d'équation $y = 2x$ à l'origine $O(0, 0)$.
  - Au point $B(3, 2)$ : une demi-tangente horizontale à gauche et une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à droite.
- **Branches infinies :** Une branche parabolique de direction $(Ox)$ en $-\infty$ et une branche parabolique de direction $(Oy)$ en $+\infty$.




3. Détermination des images d'intervalles En utilisant la continuité et la monotonie de $f$ sur chaque intervalle d'après le tableau de variations :

DimaMath.com

- $f(]-\infty,-4]) = [-2,+\infty[$
- $f([0,4]) = [-1,2]$ (car sur $[0,3]$, $f$ croît de 0 à 2, et sur $[3,4]$, elle décroît de 2 à $-1$)
- $f([3,+\infty[) = ]-\infty,2]$

4. Existence et unicité de $\alpha \in ]-6,-5[$ Considérons l'intervalle $[-6,-5]$ :

   - $f$ est continue et strictement décroissante sur $[-6,-5]$.
   - $f(-6) = 2 > 0$ et $f(-5) = -1 < 0$.

   Puisque $0 \in [-1,2]$, d'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)** sous sa forme forte, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]-6,-5[$.

5. Existence et unicité de $\beta \in ]3,4[$ Considérons l'intervalle $[3,4]$ :

   - $f$ est continue et strictement décroissante sur $[3,4]$.
   - $f(3) = 2 > 0$ et $f(4) = -1 < 0$.

   Comme $0 \in [-1,2]$, d'après le **TVI**, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta$ dans l'intervalle $]3,4[$.

6. Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > 0$ L'ensemble solution correspond aux abscisses des points pour lesquels la courbe $(C_f)$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses. En tenant compte de $f(0) = 0$ et des zéros $\alpha$ et $\beta$ :

$$S = ]-\infty,\alpha[\cup]0,\beta[$$

7. Nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ La droite horizontale $y = 1$ coupe la courbe $(C_f)$ en exactement **3 points** :

   - Une fois sur $]-\infty,-1[$ (car la fonction décroît de $+\infty$ à $-\infty$, traversant 1 entre $-6$ et $-5$).
   - Une fois sur $]-1,3]$ (car la fonction croît de $-\infty$ à 2, traversant 1 entre 0 et 3).
   - Une fois sur $[3,+\infty[$ (car la fonction décroît de 2 à $-\infty$, traversant 1 entre 3 et 4).

8. Discussion suivant les valeurs de $m$ pour $f(x) = m$ Le nombre de solutions correspond au nombre d'intersections entre $(C_f)$ et la droite horizontale $y = m$ :

   - Si $m > 2$ : **1 solution** (sur l'intervalle $]-\infty,-1[$).
   - Si $m = 2$ : **2 solutions** (l'une sur $]-\infty,-1[$ et la solution exacte $x = 3$).
   - Si $m < 2$ : **3 solutions** (une sur $]-\infty,-1[$, une sur $]-1,3[$ et une sur $]3,+\infty[$).

9. Limites aux bornes Par lecture directe du tableau de variations :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$$

10. Étude des Branches infinies

    - $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ car $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(Ox)$ au voisinage de $-\infty$.
    - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ car $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Dimamath.com

11. Limite du taux d'accroissement en $-4$ Puisque $f(-4) = -2$, nous reconnaissons la définition de la dérivabilité en $-4$ :

$$\lim_{x\to -4} \frac{f(x)+2}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)} = f'(-4)$$

Comme $(C_f)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-4$, le coefficient directeur $f'(-4) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x\to -4} \frac{f(x)+2}{x+4} = 0$$

12. Limites du taux d'accroissement en 3

- **À gauche ($x \to 3^-$) :** $(C_f)$ admet une demi-tangente horizontale à gauche au point d'abscisse 3, d'où le nombre dérivé à gauche $f'_g(3) = 0$. Donc :

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-2}{x-3} = 0$$

- **À droite ($x \to 3^+$) :** $(C_f)$ admet une demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse 3, la limite est donc infinie. Pour $x > 3$, on a $f(x) < 2 \implies f(x) - 2 < 0$ et $x - 3 > 0$. Par conséquent, le rapport est négatif :

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-2}{x-3} = -\infty$$

13. Limite en 0 Puisque $f(0) = 0$, la limite demandée est le nombre dérivé en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

La droite $(\Delta) : y = 2x$ est la tangente à $(C_f)$ en 0. Son coefficient directeur vaut 2, donc $f'(0) = 2$. Il vient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

## Solution Exercice 2

### Partie I :

La fonction $g$ est définie par :

$$\boldsymbol{g(x) = x - 3 + 4\sqrt{x+2}}$$

**1/ a)** Détermination de $D_g$

$x \in D_g \iff x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$

Ainsi l'ensemble de définition de la fonction $g$ est :

$$\boldsymbol{D_g = [-2; +\infty[}$$

**b)** Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - 3 + 4\sqrt{x+2})$$

Donc

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

DimaMath.com

**2/** Étude de la dérivabilité de $g$ à droite en $-2$ et interprétation géométrique du résultat

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{x-3+4\sqrt{x+2}+5}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2^+}1+\frac{4}{\sqrt{x+2}}$$
$$=+\infty$$

Donc la fonction $g$ n'est pas dérivable à droite en $-2$. Par conséquent la courbe $(\mathcal{C}_g)$ admet une demi tangente verticale dirigé vers le haut à droite du point d'abscisse $-2$.

**3/** **a)** Montrons que $g$ est dérivable sur $]-2;+\infty[$

La fonction $g$ est dérivable sur $]-2;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-2;+\infty[$ .

**b)** Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\,]-2;+\infty[$

Pour tout $x$ de $]-2;+\infty[$, on a :

$$\boldsymbol{g'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x+2}}}$$

**c)** Dressons le tableau de variation de $g$

| $x$ | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $-5$ | | |

**4/** Déterminons le signe de $g(x)$

Résolvons dans $]-2;+\infty[$ l'équation $g(x)=0 \iff x-3+4\sqrt{x+2}=0 \iff 4\sqrt{x+2}=3-x$ .

- Condition d'existence : $x\geq 0$ et $x\leq 3 \iff x\in[-2,3]$.
- Résolution de $g(x)=0$ En élevant au carré on obtient l'équation du second degré $x^2-22x-23=0$ qui a pour unique solution $x=-1$ dans $[-2,3]$

Comme la fonction $g$ est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ alors le tableau de signe de $g$ est :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## Partie II

La fonction $f$ est définie par :

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+7}{\sqrt{x+2}+2}}$$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

DimaMath.com

**1/ a)** Détermination de $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$

$x \in D_f \iff x+2 \geq 0$ et $2+\sqrt{x+2} \neq 0 \iff x \geq -2$ car $\sqrt{x+2} \neq -2$.

Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est :

$$\boldsymbol{D_f = [-2;+\infty[}$$

**b)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x+2}+2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x+2}+2} \cdot \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}-2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+7}{x-2}\left(\sqrt{x+2}+2\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc :

$$\boldsymbol{\lim_{x to+\infty} f(x) = +\infty}$$

**2/ a)** Étudions la dérivabilité de $f$ en $-2$ à droite et interprétons géométriquement le résultat

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} \frac{2x+4-5\sqrt{x+2}}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

Posons $t=\sqrt{x+2}$. Quand $x \to -2^+$ on a $t \to 0^+$, d'où :

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{t\to0^+} \frac{2t^2-5t}{t^2(t+2)} = \lim_{t\to0^+} \frac{2t-5}{t(t+2)} = -\infty$$

D'où :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\infty}$$

Par conséquent la fonction $f$ n'est pas dérivable à droite en $-2$ . Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à droite du point d'abscisse $-2$.

**b)** Montrons que $f$ est dérivable sur $D'_f$

La fonction $f$ est une fraction de deux fonctions dérivables sur $]-2,+\infty[$ alors $f$ est dérivable sur $D'_f = ]-2,+\infty[$.

**c)** Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in D'_f$

Soit $x \in ]-2,+\infty[$ .

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x+7)'(\sqrt{x+2}+2)-(x+7)(\sqrt{x+2}+2)'}{(\sqrt{x+2}+2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}+2-\dfrac{x+7}{2\sqrt{x+2}}}{(\sqrt{x+2}+2)^2} \\ &= \frac{2(x+2)+4\sqrt{x+2}-x-7}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+2)^2} \\ &= \frac{x-3+4\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2)^2} \\ &= \frac{g(x)}{\sqrt{x+2}+2)^2}\end{aligned}$$

Dimamath.com

Donc :

$$\forall x \in ]-2,+\infty[\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+2)^2}$$

**d)** Dressons le tableau de variation de $f$

On a : $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]-2,+\infty[$. On utilise le résultat de la question 4/ de la partie I.

**tableau de variation de $f$ :**

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2.5$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

**e)** Signe de $f(x)$

D'après le tableau de variation de la fonction $f$ on constate qu'elle admet 2 comme minimum absolu sur l'intervalle $]-2,+\infty[$ alors : $\forall x \in ]-2,+\infty[\ ;\ f(x) \geq 2 > 0$ . Par conséquent :

$$\forall x \in ]-2,+\infty[\ ;\ f(x) > 0$$

## Solution Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2-x}$$

et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1/** Calcul de la limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x^2-x} = 0 - \infty = -\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

**2/** Étude de la dérivabilité à droite en 1 :

**a)** Démonstration de l'égalité du taux d'accroissement

Soit $x > 1$, on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{x} - \sqrt{x^2-x} - 1}{x-1} = \frac{\frac{1}{x}-1}{x-} - \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x-1} = -\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

Ainsi :

$$(\forall x > 1);\quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

DimaMath.com

**b)** Limite du taux d'accroissement et interprétation géométrique Étudions la limite lorsque $x \to 1^+$ :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}\right) = -1-\infty = -\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$$

**Conclusion :** La fonction $f$ n'est pas dérivable à droite en 1.

**Interprétation géométrique :** La courbe $(C_f)$ admet une **demi-tangente verticale** dirigée vers le bas à droite du point d'abscisse 1.

**3/** Expression de la fonction dérivée $f'$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. La fonction polynôme $x \mapsto x^2 - x$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$, donc sa racine est aussi dérivable. Par somme, $f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. Pour tout $x > 1$ :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\sqrt{x^2-x}\right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Donc :

$$\boxed{(\forall x > 1);\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}$$

**4/** Tableau de variation de $f$

Déterminons le signe de $f'(x)$ pour $x > 1$ :

- $-\frac{1}{x^2} < 0$
- Puisque $x > 1$, on a $2x > 2 \implies 2x-1 > 1 > 0$. Le dénominateur $2\sqrt{x^2-x}$ est strictement positif, donc le bloc $\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} > 0$, d'où $-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} < 0$.

Comme somme de deux termes strictement négatifs, pour tout $x > 1$, $f'(x) < 0$.

Voici le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ |
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $-\infty$ |

**5/** Intersection avec l'axe des abscisses La fonction $f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]1,\frac{3}{2}]$.

- À On a $f(1) = 1$
- En $x = \frac{3}{2}$ :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{6}{4}} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4-3\sqrt{3}}{6}$$

Comme $4 - 3\sqrt{3} = \sqrt{16} - \sqrt{27}$ donc $4 - 3\sqrt{3} < 0$ d'où $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

Dimamath.com

Puisque la fonction est continue, strictement monotone et $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, alors d'après le **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]1, \frac{3}{2}[$.

Par conséquent, la courbe $(C_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse $\alpha$ tel que $\mathbf{1 < \alpha < \frac{3}{2}}$.

## Solution Exercice 4

### Partie 1

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\boldsymbol{g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}}$$

**1/** Montrer que pour tout $x \in ]0; +\infty[ : g'(x) = 6(1 - 2\sqrt{x})$ La fonction $g$ est une somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$, en écrivant $x\sqrt{x} = x^{3/2}$, sa dérivée est $\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. On a donc :

$$g'(x) = 6 - 8 \times \frac{3}{2}\sqrt{x} = 6 - 12\sqrt{x}$$

En mettant 6 en facteur, on obtient bien :

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = 6(1 - 2\sqrt{x})}}$$

**2/** Dresser le tableau de variations de $g$ Étudions le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$ :

$$g'(x) = 0 \iff 1 - 2\sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}$$

$$g'(x) > 0 \iff 1 - 2\sqrt{x} > 0 \iff \sqrt{x} < \frac{1}{2} \iff 0 < x < \frac{1}{4}$$

Calculons les valeurs remarquables et les limites :

- En $x = 0$ : $g(0) = -\frac{1}{2}$
- En $x = \frac{1}{4}$ : $g\left(\frac{1}{4}\right) = 6\left(\frac{1}{4}\right) - 8\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 0$
- En $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(6 - 8\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right) = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}(6 - 8\sqrt{x}) = -\infty$)

Voici le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

**3/** En déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$ : $g(x) \leq 0$ D'après le tableau de variations, la fonction $g$ admet un maximum absolu sur $[0;+\infty[$ au point $x = \frac{1}{4}$ qui vaut $g\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

Par conséquent, pour tout $x \in [0;+\infty[$ :

$$\boxed{g(x) \leq 0}$$

## Partie 2

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$$

**1/** Étude de la dérivabilité de $f$ à droite en 0 Calculons le taux d'accroissement de $f$ en 0 sachant que $f(0) = (-1) \times 0 - 0 + 1 = 1$ :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1 - 1}{x} = \frac{4x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 4x^2}{x} = 4\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x$$

Étudions la limite lorsque $x \to 0^+$ :

$$\lim_{x\to 0^+} 4\sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} (-4x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Par somme, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty}$$

**Interprétation graphique :** La fonction $f$ n'est **pas dérivable à droite en** 0. La courbe $(C_f)$ admet à droite de l'origine du repère une **demi-tangente verticale** dirigée vers le bas.

**2/** Branches infinies en $+\infty$

**a)** Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

En factorisant par le terme prépondérant $x^2$ :

$$f(x) = x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, le terme entre parenthèses tend vers $-4$. Par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

**b)** Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprétation géométrique du résultat

De la même manière :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{4x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 4x^2 + 1}{x} = 4\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x + \frac{1}{x} = x\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Par produit des limites, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

**Interprétation graphique :** La courbe $(C_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

Dimamath.com

**3/** Variations de $f$

**a)** Montrer que pour tout $x \in ]0;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}$

La fonction $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. En utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$ :

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x$$

Mettons tout sur le dénominateur commun $2\sqrt{x}$ :

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{x}(2\sqrt{x}) + (4x-1) - 8x(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{8x + 4x - 1 - 16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{12x - 16x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\left(6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$$

D'où :

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}}$$

**b)** Tableau de variations de la fonction $f$

Puisque pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est exactement le même que celui de $g(x)$. D'après la Partie 1, on sait que $g(x) \leq 0$ sur $[0;+\infty[$ et s'annule uniquement en $x = \frac{1}{4}$. Ainsi, $f'(x) \leq 0$, ce qui signifie que la fonction $f$ est **strictement décroissante** sur $[0;+\infty[$.

Calculons la valeur en $x = \frac{1}{4}$ :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(4\left(\frac{1}{4}\right) - 1\right)\sqrt{\frac{1}{4}} - 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = 0 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Voici le tableau de variations complet de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ↘ | $-\infty$ |

**4/** Calcul de $f(1)$ et tracé de la courbe $(C_f)$ On calcule l'image de 1 :

$$f(1) = (4(1)-1)\sqrt{1} - 4(1)^2 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$$

La courbe coupe donc l'axe des abscisses au point de coordonnées $(1;0)$.

Dimamath.com

**Solution Exercice 5**

## Partie I

**1/** Lecture graphique

Par lecture de la courbe $(C_f)$ et de ses asymptotes :

- **Limite en $+\infty$ :** La courbe $(C_f)$ se rapproche de la droite d'équation $y = x$. Donc :
$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$
- **Limite en $-\infty$ :** La courbe $(C_f)$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$. Donc :
$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$
- **Image de $0$ :** Le point de la courbe situé sur l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0, -2)$. Donc :
$$\boldsymbol{f(0) = -2}$$
- **Nombre dérivé à droite en $0$ ($f'_d(0)$) :** La courbe présente un point anguleux en $x = 0$ avec une demi-tangente verticale ou une pente infinie à droite. Visuellement, la courbe part verticalement vers le haut à droite de l'origine. Ainsi :
$$\boldsymbol{f'_d(0) = +\infty}$$
- **Limite du taux d'accroissement en $0^+$ :**
$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)+2}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'_d(0) = +\infty$$
Donc :
$$\boldsymbol{\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)+2}{x} = +\infty}$$
- **Limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ :** Comme la droite $y = x$ est une asymptote oblique en $+\infty$, la pente de cette direction asymptotique est $1$. Donc :
$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1}$$
- **Limite de $(f(x) - x)$ en $+\infty$ :** La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(C_f)$, ce qui signifie que la différence entre les deux tend vers $0$. Donc :
$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0}$$

**2/** Position du point $A\left(18, -\frac{40}{3}\right)$ par rapport à la droite $(T)$

La droite $(T)$ est la tangente à la courbe à gauche au point d'abscisse $-2$. Déterminons d'abord son équation sous la forme $y = ax + b$.

- Elle passe par le point de contact $(-2, 0)$ et par le point $(1, -2)$ par lecture graphique.
- Calculons la pente avec les points $(-2, 0)$ et $(1, -2)$ :
$$a = \frac{-2-0}{1-(-2)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

DimaMath.com

- L'équation de $(T)$ est donc de la forme $y = -\frac{2}{3}x + b$. Comme elle passe par $(-2,0)$ :

$$0 = -\frac{2}{3}(-2) + b \implies b = -\frac{4}{3}$$

L'équation de la droite $(T)$ est : $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

Vérifions si le point $A\left(18, -\frac{40}{3}\right)$ appartient à $(T)$ :

$$y_A = -\frac{2}{3}(18) - \frac{4}{3} = -\frac{36}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{40}{3}$$

Par conséquent, **la droite $(T)$ passe par le point $A$.**

## Partie II

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2+2} & \text{Si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+4x} - 2 & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

**1/** Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

Pour $x > 0$, on utilise la forme conjuguée :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-2-x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x)-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}+(x+2) = +\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0}$$

**2/** Dérivabilité et calcul de la dérivée

**a)** Sur $]-\infty, 0[$ :

$f$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur $x^2+2$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $]-\infty, 0[$. Pour tout $x \in ]-\infty, 0[$ :

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2+2)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x-2x^3+8x}{(x^2+2)^2} = \frac{12x}{(x^2+2)^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{(\forall x < 0);\ f'(x) = \frac{12x}{(x^2+2)^2}}$$

DimaMath.com

**b)** Sur $]0,+\infty[$ :

La fonction sous la racine $x \mapsto x^2+4x$ est strictement positive et dérivable sur $]0,+\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x \in ]0,+\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{(x^2+4x)'}{2\sqrt{x^2+4x}} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

Ainsi :

$$\boxed{(\forall x > 0); f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}}$$

**3/** Applications géométriques

**a)** Équation de la tangente $(T_1)$ au point d'abscisse 1 :

Comme $1 > 0$, on utilise la deuxième expression de $f$ et sa dérivée associée :

- $f(1) = \sqrt{5} - 2$
- $f'(1) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

L'équation de cette tangente est :

$$\begin{aligned} y = f'(1)(x-1) + f(1) &\iff y = \frac{3}{\sqrt{5}}(x-1) + \sqrt{5} - 2 \\ &\iff y = \frac{3\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5} - 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(T_1) : y = \frac{3\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5} - 2}$$

**b)** Existence d'une tangente parallèle à la droite $y = x$ :

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. On cherche donc s'il existe une solution à l'équation $f'(x) = 1$.

- **Sur** $]-\infty,0[$ **:**
  $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+2)^2}$. Comme $x < 0$, $f'(x) < 0$, donc l'équation $f'(x) = 1$ n'admet aucune solution dans $]-\infty,0[$.
- **Sur** $]0,+\infty[$ **:**
  Pour tout $x > 0$ $x+2 > 0$ et $\sqrt{x^2+4x} > 0$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\implies \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} = 1 \\ &\implies x+2 = \sqrt{x^2+4x} \\ &\implies (x+2)^2 = x^2+4x \\ &\implies 4 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible. Donc l'équation $f'(x) = 1$ n'admet aucune solution dans $]0,+\infty[$.

**Conclusion :** Il n'existe aucune tangente à $(C_f)$ parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Dimamath.com

## Solution Exercice 6

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**1/** Dérivabilité et calcul de $f'(x)$

La fonction $f$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition. Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)(1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 4}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}}}$$

**2/** Asymptote oblique, position relative et tracé

**a)** Vérification de la forme décomposée :

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ :

$$x + \frac{4}{x-1} = \frac{x(x-1) + 4}{x-1} = \frac{x^2 - x + 4}{x-1} = f(x)$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\,;\, f(x) = x + \frac{4}{x-1}}}$$

**b)** Asymptote oblique $(\Delta) : y = x$ :

Calculons la limite de la différence $f(x) - x$ au voisinage de $\pm\infty$ :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

D'où :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

Par conséquent, la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

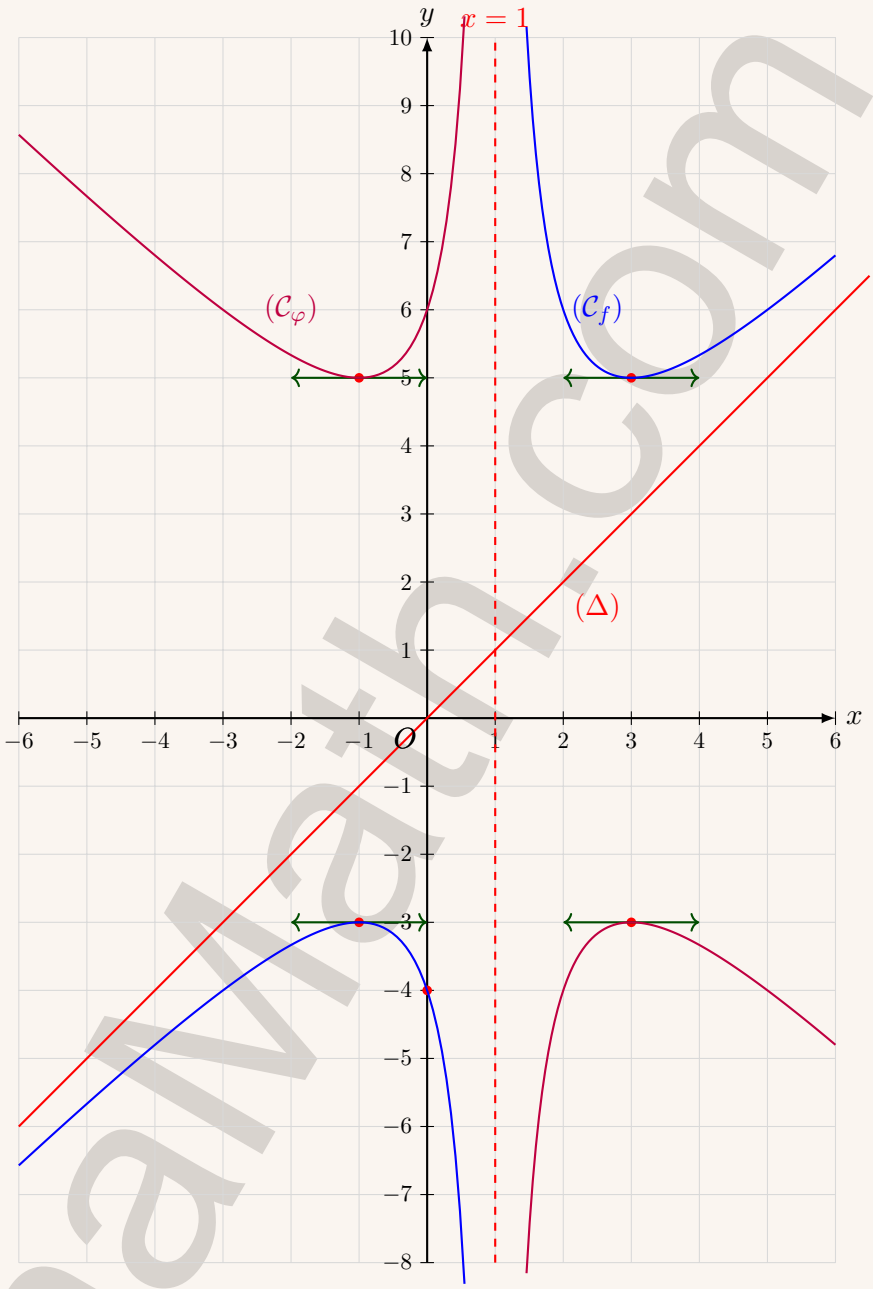
**c)** Position relative de $(\Delta)$ et $(\mathcal{C}_f)$ :

On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) - y = \frac{4}{x-1}$ donc le signe de $f(x) - x$ dépend de celui de $x - 1$ :

DimaMath.com

- Si $x \in ]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$, donc $f(x) - y > 0$ : donc sur $]1, +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessus** de $(\Delta)$.
- Si $x \in ]-\infty, 1[$, $x - 1 < 0$, donc $f(x) - y < 0$ : donc sur $]-\infty, 1[$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est **en-dessous** de $(\Delta)$.

**d)** Construction de $(\Delta)$ et $(\mathcal{C}_f)$ :




**3/** Centre de symétrie Montrons que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $2(1) - x = 2 - x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Vérifions que $f(2 - x) + f(x) = 2(1) = 2$ :

$$f(2-x) = (2-x) + \frac{4}{(2-x)-1} = 2 - x + \frac{4}{1-x} = 2 - x - \frac{4}{x-1}$$

$$f(2-x) + f(x) = \left(2 - x - \frac{4}{x-1}\right) + \left(x + \frac{4}{x-1}\right) = 2$$

Donc, le point $I(1, 1)$ est bien un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Dimamath.com

**4/** Étude de la fonction $\varphi$ telle que $\varphi(x) = f(2-x)$

**a)** Démontrer que $\varphi(x) = 2 - f(x)$ :

D'après la relation de symétrie établie à la question 3, on a $f(2-x) + f(x) = 2$, ce qui implique directement :

$$\varphi(x) = f(2-x) = 2 - f(x)$$

**b)** Tracé de $(\mathcal{C}_\varphi)$ :

La relation $\varphi(x) = 2 - f(x)$ exprime que la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $x = 1$

**La courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est tracé dans le même repère que $(\mathcal{C}_\varphi)$.**

**5/** Soit $g$ La fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = a\sqrt{x} + b$ où $a$ et $b$ sont deux réels données tels que La droite $\Delta' : y = x - 3$ est tangente à $(C_g)$ au point d'abscisse 1.

**a)** Détermination des réels $a$ and $b$ pour $g(x) = a\sqrt{x} + b$

La droite $\Delta' : y = x - 3$ est tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse 1. On a donc :

$$g(1) = 1 - 3 = -2 \quad \text{et} \quad g'(1) = 1$$

La fonction $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$.

- $g'(1) = 1 \implies \frac{a}{2\sqrt{1}} = 1 \implies a = 2$
- $g(1) = -2 \implies 2\sqrt{1} + b = -2 \implies 2 + b = -2 \implies b = -4$

Donc

$$\boldsymbol{a = 2 \text{ et } b = -4}$$

**b) Valeur approchée de $g(1,001)$ :**

En utilisant l'approximation affine au voisinage de 1 :

$$g(1+h) \approx g(1) + h \cdot g'(1)$$

$$g(1,001) \approx -2 + 0,001 \times 1 = -1,999$$

**6/** Étude de la fonction globale $h$ On prend $a = 2$ et $b = -4$. Ainsi, $g(x) = 2\sqrt{x} - 4$.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**a)** Continuité en 0 :

- $h(0) = f(0) = \dfrac{0^2 - 0 + 4}{0 - 1} = -4$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -4$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2\sqrt{x} - 4) = -4$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = h(0)$, **la fonction $h$ est donc continue en** 0.

**b)** Dérivabilité en 0 :

- **À gauche en** 0 **:** $h$ coïncide avec $f$ qui est dérivable en 0. Donc $h$ est dérivable à gauche en 0 et :

$$h'_g(0) = f'(0) = \frac{0^2 - 2(0) - 3}{(0-1)^2} = -3$$



DimaMath.com

- **À droite en** $0$ **:** Étudions le taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}-4-(-4)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{x}}=+\infty$$

La limite n'est pas finie, donc $h$ **n'est pas dérivable à droite en** $0$ , par conséquent la courbe $(\mathcal{C}_h)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse $0$).

**c)** Tableau de variation de $h$ :

- Pour $x<0$, $h'(x)=f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Le signe dépend du trinôme $x^2-2x-3$ dont les racines sont $-1$ et $3$. Sur $]-\infty,0]$, la dérivée s'annule en $-1$, elle est positive sur $]-\infty,-1[$ et négative sur $]-1,0]$.
- Pour $x>0$, $h'(x)=g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$.

Valeurs remarquables : $h(-1)=f(-1)=\dfrac{1+1+4}{-2}=-3$, et $h(0)=-4$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-3$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

## Solution Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x-1}$$

**1/** Limite de $f$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x-1=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

**2/** Continuité de $f$ sur $[0,+\infty[$

La fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur $[0,+\infty[$.

**3/** Étude des variations

**a)** Calcul de la dérivée $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ :

La fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

DimaMath.com

Soit $x \in ]0,+\infty[$ $f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}\right)' - 1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times x^{1/2} - 1 = \sqrt{x} - 1$. Donc

$$\boxed{f'(x) = \sqrt{x} - 1}$$

**b)**Signe de $f'(x)$ et tableau de variations :
Pour tout $x \in ]0,+\infty[$ :

- $f'(x) = 0 \iff \sqrt{x} - 1 = 0 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$
- $f'(x) > 0 \iff \sqrt{x} > 1 \iff x > 1$
- $f'(x) < 0 \iff \sqrt{x} < 1 \iff 0 < x < 1$

Calculons les valeurs remarquables :

- $f(0) = \frac{2}{3}(0) - 0 - 1 = -1$
- $f(1) = \frac{2}{3}(1)(1) - 1 - 1 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

Tableau de variations complet :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $-\frac{4}{3}$ | ↗ | $+\infty$ |

**4/** Résolution de $f(x) = 0$

- Sur l'intervalle $[0,1]$, le maximum de $f$ est $-1$. Comme $-1 < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante. Comme $0 \in [-\frac{4}{3},+\infty[ = f([0,+\infty[)$, alors d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1,+\infty[$.

Par conséquent, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans** $[0,+\infty[$.

**Vérifions que $3 < \alpha < 4$ :**

$f(3) = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} - 3 - 1 = 2\sqrt{3} - 4 \approx -0,54 < 0$

$f(4) = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} - 4 - 1 = \frac{16}{3} - 5 = \frac{1}{3} > 0$

Comme $f(3) < 0 < f(4)$ et que $f$ est strictement croissante sur $[3,4]$, alors :

$$\boxed{3 < \alpha < 4}$$

.

DimaMath.com

**5/** Signe de $f(x)$

**a)**Valeurs approchées et encadrement :

À l'aide d'une calculatrice, on trouve :

$$f(3,6) = 2,4\sqrt{3,6} - 4,6 \approx -0,046 < 0$$

$$f(3,7) = \frac{7,4}{3}\sqrt{3,7} - 4,7 \approx 0,045 > 0$$

Puisque $f(3,6) < 0 < f(3,7)$, on en déduit l'encadrement d'amplitude $0,1$ :

$$\boxed{\mathbf{3,6 < \alpha < 3,7}}$$

**b)**Signe de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$ :

D'après les variations de $f$ et l'existence de la racine unique $\alpha$ :

- Pour tout $x \in [0,\alpha[$, $f(x) < 0$
- Pour $x = \alpha$, $f(\alpha) = 0$
- Pour tout $x \in ]\alpha,+\infty[$, $f(x) > 0$

Tableau de signe de $f(x)$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**6/** Étude de la fonction réciproque

**a)**Existence de $g^{-1}$ :

$g$ est la restriction de $f$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Comme $g$ est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, elle admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur l'intervalle image :

$$J = g([1,+\infty[) = \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[ = \left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$$

**b)**Calculs et dérivabilité de $g^{-1}$ :

Nous avons déjà calculé $g(4) = \frac{1}{3}$. On en déduit immédiatement que $g^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

La fonction $g$ est dérivable en $4$ et sa dérivée vaut :

$$g'(4) = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Comme $g'(4) \neq 0$, la fonction réciproque $g^{-1}$ est dérivable en $\frac{1}{3}$ et sa formule de dérivation donne :

$$(g^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{1} = 1$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{(g^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right) = 1}}$$

DimaMath.com

## Solution Exercice 8

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2-4x+5}, & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x-1+2\sqrt{x-2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**1/ a)** Formes canoniques et factorisations

- **Pour $x \leq 2$ :** Calculons la forme canonique du trinôme sous la racine cubique :

$$x^2-4x+5 = (x-2)^2-4+5 = (x-2)^2+1$$

Par conséquent :

$$\boxed{(\forall x \leq 2);\ f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2+1}}$$

- **Pour $x > 2$ :** Développons l'expression proposée :

$$(\sqrt{x-2}+1)^2 = (\sqrt{x-2})^2+2\sqrt{x-2}+1 = (x-2)+2\sqrt{x-2}+1 = x-1+2\sqrt{x-2}$$

On retrouve bien l'expression de $f(x)$. D'où :

$$\boxed{(\forall x > 2);\ f(x) = (\sqrt{x-2}+1)^2}$$

**b)** Calcul des limites aux bornes

- **Limite en $-\infty$ :** On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-2)^2+1\right) = +\infty$. Par composition avec la fonction racine cubique :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

- **Limite en $+\infty$ :** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}+1)^2 = +\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

**2/** Continuité de $f$ en $x_0 = 2$

Calculons la valeur de $f(2)$ ainsi que les limites à gauche et à droite en 2 :

- $f(2) = \sqrt[3]{2^2-4(2)+5} = \sqrt[3]{1} = 1$
- **À gauche :** $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}\sqrt[3]{(x-2)^2+1} = \sqrt[3]{0+1} = 1$
- **À droite :** $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(\sqrt{x-2}+1)^2 = (0+1)^2 = 1$

Comme $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2)$, la fonction $f$ est **continue en** $x_0 = 2$.

**3/** Dérivabilité de $f$ en $x_0 = 2$ et interprétation géométrique

- **À gauche de 2 ($x < 2$) :** Calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2+1}-1}{x-2}$$

En utilisant l'identité $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour le numérateur avec $a = \sqrt[3]{(x-2)^2+1}$ et $b = 1$, on obtient :

$$\sqrt[3]{(x-2)^2+1}-1 = \frac{(x-2)^2+1-1}{\sqrt[3]{((x-2)^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2+1}+1}$$

DimaMath.com

Ainsi :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)\left(\sqrt[3]{((x-2)^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2+1}+1\right)}$$
$$=\frac{x-2}{\sqrt[3]{((x-2)^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2+1}+1}$$

En passant à la limite quand $x\to 2^-$ :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{0}{1+1+1}=0$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0}$$

Par conséquent $f$ est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2)=0$.

- **À droite de 2 ($x>2$) :**

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{(\sqrt{x-2}+1)^2-1}{x-2}=\frac{(x-2)+2\sqrt{x-2}}{x-2}=1+\frac{2}{\sqrt{x-2}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{\sqrt{x-2}}=+\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty}$$

La fonction $f$ n'est pas dérivable à droite en 2. En conclusion la fonction $f$ n'est pas dérivable en $x_0=2$

- **Interprétation géométrique :**
  - La courbe $\mathcal{C}_f$ admet à gauche du point $A(2,1)$ une demi-tangente horizontale .
  - La courbe $\mathcal{C}_f$ admet à droite du point $A(2,1)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

Le point $A(2,1)$ est un point anguleux.

**4/** Calcul de $\lim x\to 3\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ et interprétation géométrique

On a $f(3)=(\sqrt{3-2}+1)^2=4$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}+1)^2-4}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}+1-2)(\sqrt{x-2}+1+2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}+3}{\sqrt{x-2}+1}$$
$$=2$$

Car $x-3=(\sqrt{x-2})^2-1^2=(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=2}$$

**Interprétation géométrique :** $f$ est dérivable en 3 avec $f'(3)=2$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur 2 au point d'abscisse 3.

Dimamath.com

**5/** Équation de la tangente au point d'abscisse 3

L'équation de la tangente est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3)+f(3) \\ &= 2(x-3)+4 \\ &= 2x-2 \end{aligned}$$

Alors l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 3 est :

$$\boxed{y = 2x - 2}$$

**6/** **a)** Dérivabilité sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$

- Sur $]-\infty;2[$, la fonction polynomiale $x \mapsto x^2-4x+5$ est dérivable et strictement positive (car égale à $(x-2)^2+1 \geq 1 > 0$). Par composition avec la fonction racine cubique (dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$), $f$ est dérivable sur $]-\infty;2[$.
- Sur $]2;+\infty[$, la fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable et strictement positive, donc sa racine carrée l'est aussi. Par somme et carré, $f$ est dérivable sur $]2;+\infty[$.

**b)** Expression de la dérivée sur $]-\infty;2]$

Soit $x \in ]-\infty;2[$, en écrivant $f(x) = (x^2-4x+5)^{\frac{1}{3}}$ et en dérivant , on obtient :

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x-4)(x^2-4x+5)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{2(x-2)}{3(x^2-4x+5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+5)^2}}$$

Puisqu'on a montré en **3/** que $f$ est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = 0$ , donc

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty;2]\ ,\ f'(x) = \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+5)^2}}}$$

**c)** Sens de variation sur $]2;+\infty[$

Pour $x > 2$, en utilisant $f(x) = (\sqrt{x-2}+1)^2$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sqrt{x-2}+1) \times (\sqrt{x-2}+1)' \\ &= 2(\sqrt{x-2}+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in ]2;+\infty[\ ,\ f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}}$$

Pour tout $x \in ]2;+\infty[$, $\sqrt{x-2} > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc **strictement croissante sur** $]2;+\infty[$.

**d)** Tableau de variation de $f$

- Sur $]-\infty;2]$, $x-2 \leq 0$ et le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif, donc $f'(x) \leq 0$ : donc $f$ est décroissante.
- Sur $[2;+\infty[$, $f'(x) > 0$ : $f$ est croissante.

DimaMath.com

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**7)** Étude de la restriction $g$ de $f$ sur $]-\infty;2]$

**a)** Solution unique de $g(x)=x$

Soit la fonction $h$ définie sur $[1;2]$ par $h(x)=g(x)-x$.

- $h$ est continue sur $[1;2]$ comme différence de fonctions continues.
- $g$ est strictement décroissante sur $[1;2]$ et $x \mapsto -x$ l'est aussi, donc $h$ est strictement décroissante sur $[1;2]$.
- $h(1)=g(1)-1=\sqrt[3]{1-4+5}-1=\sqrt[3]{2}-1$ donc $h(1)>0$.
- $h(2)=g(2)-2=1-2=-1<0$.

Puisque $h$ est continue et strictement décroissante sur $[1,2]$ et $h(1)\times h(2)<0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0 \iff g(x)=x$ admet une **unique solution $\alpha \in ]1;2[$**.

**b)** Existence de la fonction réciproque $g^{-1}$

La fonction $g$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I=]-\infty;2]$. Elle réalise donc une bijection de $I$ vers l'intervalle $J$ défini par :

$$J=g(I)=\left[g(2);\lim_{x\to-\infty}g(x)\right[ \text{ soit } \boxed{J=[1;+\infty[}$$

**c)** Dérivabilité de $g^{-1}$ en $\alpha$

On a $\alpha \in ]1;2[$. Sur cet intervalle ouvert, $g$ est dérivable. De plus, $g'(\alpha)=\dfrac{2(\alpha-2)}{3\sqrt[3]{(\alpha^2-4\alpha+5)^2}}$.

Comme $\alpha<2$, $\alpha-2\neq 0$, donc $g'(\alpha)\neq 0$. et $g(\alpha)=\alpha$, alors d'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, $g^{-1}$ **est dérivable en** $\alpha$.

**d)** Calcul de $(g^{-1})'(\alpha)$

Par formule :

$$(g^{-1})'(\alpha)=\frac{1}{g'(g^{-1}(\alpha))}=\frac{1}{g'(\alpha)}$$

Or $g(\alpha)=\alpha \implies \sqrt[3]{\alpha^2-4\alpha+5}=\alpha \implies \alpha^2-4\alpha+5=\alpha^3$.

D'où :

$$3\left(\sqrt[3]{\alpha^2-4\alpha+5}\right)^2=3\alpha^2$$

Par conséquent

$$g'(\alpha)=\frac{2(\alpha-2)}{3\sqrt[3]{(\alpha^2-4\alpha+5)^2}}=\frac{2(\alpha-2)}{3\alpha^2}$$

. Donc :

$$\boxed{(g^{-1})'(\alpha)=\frac{3\alpha^2}{2(\alpha-2)}}$$

Dimamath.com

**e)** Expression explicite de $g^{-1}(x)$

Soit $x \in [1;+\infty[$ et $y \in ]-\infty;2]$.

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) = y &\iff g(y) = x \iff \sqrt[3]{y^2-4y+5} = x \\ &\iff y^2-4y+5 = x^3 \\ &\iff (y-2)^2+1 = x^3 \\ &\iff (y-2)^2 = x^3-1 \\ &\iff |y-2| = \sqrt{x^3-1} \end{aligned}$$

Comme $y \leq 2$, on a $|y-2| = -(y-2) = 2-y$. D'où :

$$2-y = \sqrt{x^3-1} \implies y = 2-\sqrt{x^3-1}$$

Alors :

$$\boxed{(\forall x \in J);\ g^{-1}(x) = -\sqrt{x^3-1}+2}$$

## Solution Exercice 9

Soit $f$ la fonction numérique d'une variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

**1/ a)** Ensemble de définition $D_f$

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff x \geq 0 \text{ et } \sqrt[3]{x}-1 \neq 0 \\ &\iff x \geq 0 \text{et } \sqrt[3]{x} \neq 1 \\ &\iff x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble de définition est :

$$\boxed{D_f = [0,1[\cup]1,+\infty[}$$

**b)** Limites aux bornes de $D_f$

- **En** $0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0-1-\frac{1}{0-1} = -1+1 = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

- **En** $1^-$ **:** Quand $x \to 1^-$, $\sqrt[3]{x} \to 1^-$ donc $\sqrt[3]{x}-1 \to 0^-$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = -\infty \implies \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1-1-(-\infty) = +\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty}$$

- **En** $1^+$ **:** Quand $x \to 1^+$, $\sqrt[3]{x} \to 1^+$ donc $\sqrt[3]{x}-1 \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = +\infty \implies \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1-1-(+\infty) = -\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$$

DimaMath.com

- **En $+\infty$ :**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \implies \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

**2/ a)** Asymptote oblique

Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)=0$$

Par conséquent, la droite $(\Delta)$ d'équation $y=x-1$ est bien une **asymptote oblique** à $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**b)** Positions relatives de $(C_f)$ et $(\Delta)$

Le signe de $f(x)-(x-1)=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$ est le signe opposé de $\sqrt[3]{x}-$ :

- Sur $[0,1[$ : $\sqrt[3]{x}-1<0 \iff -\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}>0$. Donc $(C_f)$ **est au-dessus de** $(\Delta)$ sur $[0,1[$.
- Sur $]1,+\infty[$ : $\sqrt[3]{x}-1>0 \iff -\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}<0$. Donc $(C_f)$ **est en dessous de** $(\Delta)$ sur $]1,+\infty[$.

**3/** Dérivabilité à droite en 0

Étudions le taux d'accroissement en 0 à droite. Soit $x>0$ :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\frac{x-1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}{x}\\&=1-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\\&=1-\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt[3]{x}-1)}\\&=1-\frac{1}{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}1-\frac{1}{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}=+\infty$$

Alors :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty}$$

LAinsi la fonction $f$ **n'est pas dérivable à droite en** 0.

**Interprétation graphique :** La courbe $(C_f)$ admet à droite du point $(0,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

**4/** Calcul de $f'(x)$ et tableau de variation

Pour tout $x\in D_f\setminus\{0\}$, en écrivant la fonction sous la forme $f(x)=x-1-(\sqrt[3]{x}-1)^{-1}$ :

$$f'(x)=1-\left(-\frac{(\sqrt[3]{x})'}{(\sqrt[3]{x}-1)^2}\right)=1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-1)^2}$$

DimaMath.com

Donc

$$\boxed{\forall x \in D_f \setminus 0 \ : \ f'(x) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-1)^2}}$$

Puisque pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$, $3\sqrt[3]{x^2} > 0$ et $(\sqrt[3]{x}-1)^2 > 0$, alors : $f'(x) > 0$.

Par conséquent la fonction $f$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$.

**Tableau de variation de $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ $+\infty$ | |

**5/** Solution unique $\alpha$

Sur $]1,+\infty[$, la fonction $f$ est continue et strictement croissante et $0 \in \mathbb{R} = f(]1,+\infty[)$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]1,+\infty[$.

Vérifions que $2\sqrt{2} < \alpha < \dfrac{27}{8}$ :

- Pour $x = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} = 8^{1/2}$ : $\sqrt[3]{x} = (8^{1/2})^{1/3} = 8^{1/6} = \sqrt{2}$. Donc :

$$f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} - 2 < 0$$

- Pour $x = \dfrac{27}{8}$ : $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{8} - 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{19}{8} - 2 = \frac{3}{8} > 0$$

Alors : $f(2\sqrt{2}) \times f\left(\dfrac{27}{8}\right) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a bien :

$$\boxed{2\sqrt{2} < \alpha < \frac{27}{8}}$$

**6/** Étude de la restriction $g$

Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$

**a)** $g$ est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur $J = g(]1,+\infty[) = \mathbb{R}$.

**b)** Calculons $g(8)$ :

$$g(8) = 8 - 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{8}-1} = 7 - \frac{1}{2-1} = 6$$

Donc

$$\boxed{g^{-1}(6) = 8}$$

DimaMath.com

**c)** $g$ est dérivable en $8$ et son dérivé en $8$ est :

$$g'(8) = 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}(\sqrt[3]{8}-1)^2} = 1 + \frac{1}{3\times 4\times 1} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

Comme $g'(8) \neq 0$, la fonction $g^{-1}$ est dérivable en $y_0 = 6$.

**d)** On applique la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

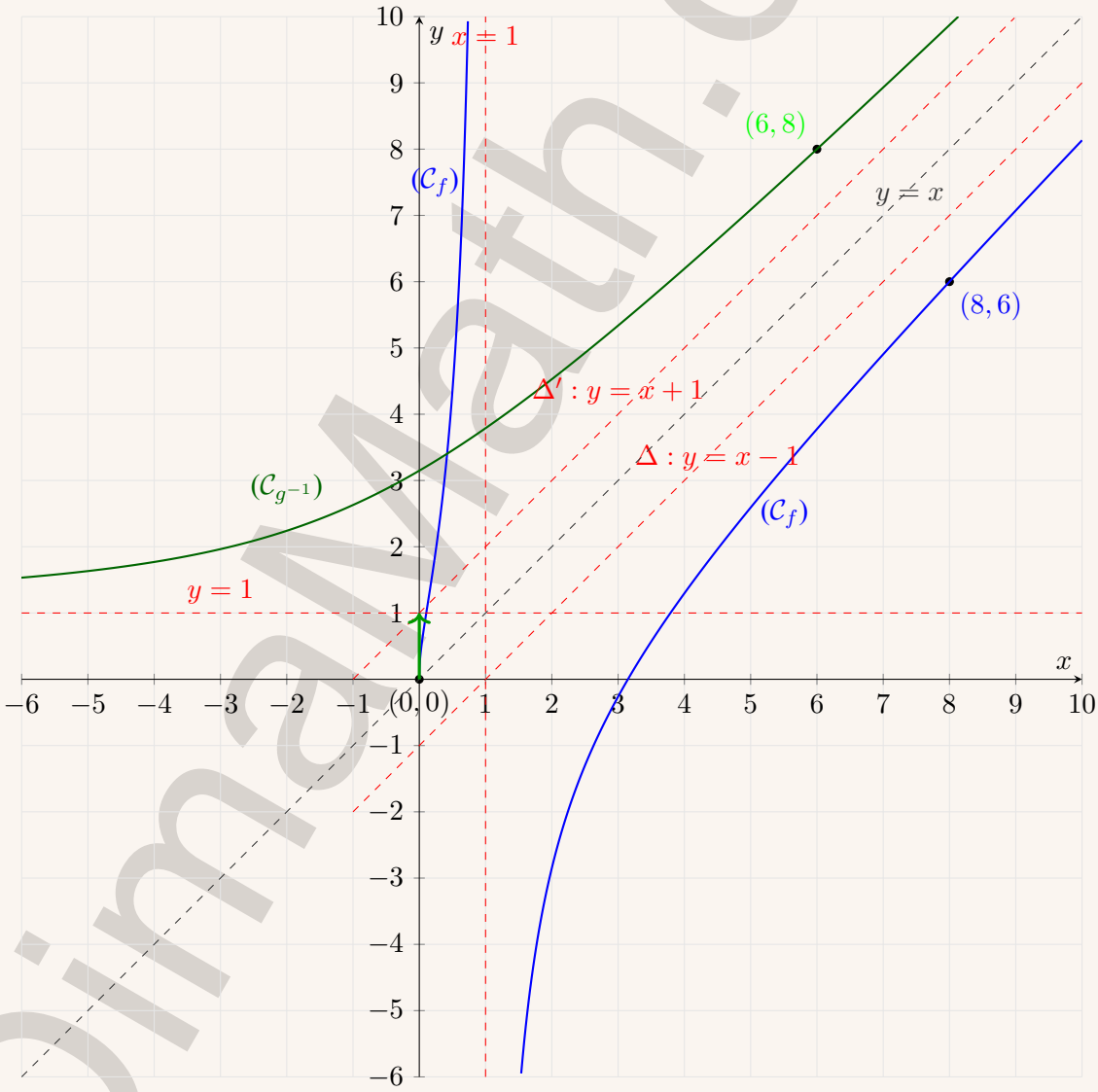
$$(g^{-1})'(6) = \frac{1}{g'(g^{-1}(6))} = \frac{1}{g'(8)} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \mathbf{\frac{12}{13}}$$

Donc {

$$\boxed{\mathbf{(g^{-1})'(6) = \frac{12}{13}}}$$

}

**7/** Représentation graphique Les courbes $(C_f)$ et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).




DimaMath.com