Série 5
La dérivation et ses applications

2 BAC SM — S. EL JAAFARI

I– Énoncés des exercices

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}, & \text{si } x\leq 1\\ \sqrt{x^2-1}\cdot\arctan x+\arctan\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x>1\end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentataive dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ Étudier la continuité de f en 1.

2/ Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter les résultats obtenus.

3/ On pose $U(x)=2x^3-x^2-4x+6$.

a) Étudier les variations de U sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $U(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $\alpha\in\left]-\sqrt{3},-\dfrac{5}{3}\right[$ et déterminer le signe de $U(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4/ Montrer que pour tout $x<1$ $\quad f'(x)=\dfrac{U(x)}{3x^2\sqrt[3]{(x^2-2x+2)^2}}$.

5/ Déterminer $f'(x)$, pour tout $x>1$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

6/ **a)** Étudier la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y=\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}-1$ est une asymptote de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

7/ Montrer que $\forall x\in[0,1]$ $\quad f(x)\leq x-1$.

8/ Tracer $\mathcal{C}_f$ (on prend $f(\alpha)\approx 1{,}8$).

9/ Soit g la restriction de f sur $I=]1,+\infty[$.

a) Montrer que g est bijective de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Tracer $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère.

Dimath.com

Exercice 2

1/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$$

2/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |f'(x)| \leq x^4$

3/ Déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |f(x)| \leq |x^5|$

4/ Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\arctan x - x}{x^2}\right)$

Exercice 3

Partie I

Soit f la restriction de la fonction **sin** à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1/ Montrer que f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$.
On pose h sa fonction réciproque.

2/ **a)** Déterminer la monotonie de la fonction h sur $[-1; 1]$.

b) Étudier la parité de h.

3/ Montrer que : $\forall x \in [-1; 1], \cos[h(x)] = \sqrt{1 - x^2}$.

4/ Soient a ; b ; c trois éléments de l'intervalle $[-1; 1]$.
Prouver que si $h(a) + h(b) + h(c) = \frac{\pi}{2}$ alors $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.

5/ On considère l'équation $(E) : h(x) + h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution β dans $]-1; 1[$, et que $0 < \beta < 1$.

b) Déterminer la valeur exacte de β. *(Remarquer que* $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$*)*

Partie II

Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2} h\left(\sqrt[3]{x+1}\right) & ; \ -1 \leq x < 0 \\ g(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) & ; \ x \geq 0 \end{cases}$$

h étant la fonction définie dans la Partie I.

1/ **a)** Montrer que g est définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

b) Étudier la continuité de g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

Dimamath.com

2/ **a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{g(x)}{x+1}$, puis étudier la dérivabilité de g à droite en (-1).

b) Prouver que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{g(x)-\frac{\pi}{4}}{x} = +\infty$, $\left(\text{poser : } t = h\left(\sqrt[3]{x+1}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right)$, puis étudier la dérivabilité de g à gauche en 0.

c) Étudier la dérivabilité de g à droite en 0.

d) Interpréter géométriquement les résultats obtenus en 2) a ; b ; c.

3/ On admet que g est dérivable en tout point de $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$ avec :

$$\begin{cases} g'(x) = \dfrac{-1}{2(1+x^2)} & ;\ x>0 \\ g'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}} & ;\ -1<x<0 \end{cases}$$

Donner le tableau de variation de g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

4/ Soit φ la restriction de la fonction g à l'intervalle $I=[0;+\infty[$.

a) Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}^+$ et que $0<\beta<1$.

b) Montrer que φ est bijective de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Soit x un élément de I, calculer $\varphi(x)$ en fonction de $\arctan(x)$.

d) Soit φ^{-1} la fonction réciproque de φ. Calculer $\varphi^{-1}(x)$ pour tout x de J.

5/ Soit $(\mathcal{C}_\varphi)$ la courbe de φ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.

a) Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_\varphi)$ au voisinage de $+\infty$.

b) Construire $(\mathcal{C}_\varphi)$ et $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1+\sqrt{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ \sqrt[3]{x} - \arctan x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

1/ Étudier la continuité de f en 0.

2/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \arctan x \leq x$

3/ **a)** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$$

b) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\arctan x}{x^3}$

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

4/ Étudier les variations de la fonction f.

5/ On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

DimaMath.com

(a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.

(b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ (On donne : $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 0,7$).

6/ Soit g la restriction de la fonction f sur $I = \mathbb{R}^*_-$.
Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\arctan\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}, & \text{si } x > -1 \\ x + 3 - \sqrt{-1-x}, & \text{si } x < -1 \\ 2, & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

1/ **a)** Montrer que f est continue en -1.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

c) Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2/ Pour tout nombre réel a strictement positif, on considère la fonction φ_a définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi_a(x) = (\arctan(a) - a)x^3 - (\arctan(x) - x)a^3$$

a) Calculer $\varphi_a(0)$ et $\varphi_a(a)$, puis en déduire que :

$$\exists c \in]0; a[\ ; \ \frac{\arctan(a) - a}{a^3} = \frac{-1}{3(1+c^2)}$$

b) En déduire que f est dérivable à droite en -1.

c) Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

3/ **a)** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.

b) Montrer que $\forall x \in]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} - \arctan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$$

c) Montrer que $\forall t \in [0; +\infty[$:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{t}{1+t^2} - \arctan(t) \leq 0$$

d) En déduire les variations de la fonction f sur $]-1; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4/ **a)** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1; +\infty[$, et que $1 < \alpha < 2$ (on rappelle que $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$).

b) Tracer la courbe (C_f) de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5/ On désigne par g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$.

Dimamath.com

a) Montrer que la fonction g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer, puis tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en α, et que :

$$(g^{-1})'(\alpha) = \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{3-\alpha-\alpha^2}$$

6/ Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[: |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$ (utiliser la question 3(c)).

7/ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n < 2$ (Remarquer que $\forall x > 0 : \arctan(x) < x$).

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

DimaMath.com

II– Corrigés de exercices

Solution Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}, & \text{si } x\leq 1\\ \sqrt{x^2-1}\cdot\arctan x+\arctan\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x>1\end{cases}$$

1/ Étude de la continuité de f en 1

Calculons les limites à gauche et à droite en 1 ainsi que la valeur de $f(1)$:

- **Image de** 1 **:** $f(1)=\left(1-\dfrac{1}{1}\right)\sqrt[3]{1-2+2}=0$. Donc $\boldsymbol{f(1)=0}$
- **Limite à gauche :**

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}=(0)\cdot\sqrt[3]{1}=0.$$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0}$

- **Limite à droite :**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot\arctan x+\arctan\sqrt{x^2-1}\right)=0\cdot\frac{\pi}{4}+\arctan(0)=0.$$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0}$

- **Conclusion :**

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0$, alors la fonction f est **continue en** 1.

2/ Étude de la dérivabilité de f en 1

- **Dérivabilité à gauche en** 1 **:**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{x-1}{x}\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x}\\&=1.\end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable à gauche en 1 et $\boldsymbol{f'_g(1)=1}$.

- **Dérivabilité à droite en** 1 **:**

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\arctan x+\frac{\arctan\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan x=\dfrac{\pi}{4}>0$, on a :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty.$$

Ainsi, f n'est pas dérivable à droite en 1.

DimaMath.com

- **Conclusion :** Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, alors f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation géométrique :

- À gauche de $(1,0)$, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente de coefficient directeur 1.
- À droite de $(1,0)$, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.
- Le point $(1,0)$ est un **point anguleux** pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

3/ Étude de $U(x)=2x^3-x^2-4x+6$

a) Variations de U : U est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$U'(x)=6x^2-2x-4=2(3x^2-x-2)=2(x-1)(3x+2).$$

Les racines de $U'(x)$ sont $x_1=1$ et $x_2=-\frac{2}{3}$.

- U est strictement croissante sur $\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right]$ et sur $[1,+\infty[$.
- U est strictement décroissante sur $\left[-\frac{2}{3},1\right]$.

Tableau de variation dee U :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$U'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$U(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{198}{27}$	↘	3	↗	$+\infty$

b) Unicité de la solution α :

- Le maximum local est $U\left(-\frac{2}{3}\right)=2\left(-\frac{8}{27}\right)-\frac{4}{9}+\frac{8}{3}+6=\frac{198}{27}>0$.
- Le minimum local est $U(1)=2-1-4+6=3>0$.

Sur $[-\frac{2}{3},+\infty[$, le minimum de U est $3>0$, donc $U(x)=0$ n'a aucune solution sur cet intervalle. Sur $]-\infty,-\frac{2}{3}[$, U est continue, strictement croissante, et $\lim\limits_{x\to-\infty}U(x)=-\infty$, $U\left(-\frac{2}{3}\right)>0$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $U(x)=0$ admet une **unique solution** $\alpha\in\mathbb{R}$.

c) Encadrement de α et signe de $U(x)$:

- $U(-\sqrt{3})=-6\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}+6=3-2\sqrt{3}=\sqrt{9}-\sqrt{12}<0$.
- $U\left(-\frac{5}{3}\right)=2\left(-\frac{125}{27}\right)-\frac{25}{9}+\frac{20}{3}+6=\frac{-250-75+180+162}{27}=\frac{17}{27}>0$.

Puisque $U(-\sqrt{3})<0<U\left(-\frac{5}{3}\right)$, on déduit que $\alpha\in\left]-\sqrt{3},-\frac{5}{3}\right[$.

Tableau de signe de $U(x)$:

$$U(x)<0 \text{ pour } x<\alpha \quad \text{et} \quad U(x)>0 \text{ pour } x>\alpha.$$

DimaMath.com

x	$-\infty$		α		∞
$U(x)$		$-$	0	$+$	

4/ Calcul de $f'(x)$ pour $x < 1$

Pour $x < 1$ $(x \neq 0)$, $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(x^2 - 2x + 2)^{1/3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(x^2 - 2x + 2)^{1/3} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{3}(2x - 2)(x^2 - 2x + 2)^{-2/3}$$

En réduisant au même dénominateur $3x^2(x^2 - 2x + 2)^{2/3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2 - 2x + 2) + x(x - 1)(2x - 2)}{3x^2 \sqrt[3]{(x^2 - 2x + 2)^2}} \\ &= \frac{3x^2 - 6x + 6 + 2x^3 - 4x^2 + 2x}{3x^2 \sqrt[3]{(x^2 - 2x + 2)^2}} \\ &= \frac{2x^3 - x^2 - 4x + 6}{3x^2 \sqrt[3]{(x^2 - 2x + 2)^2}} \\ &= \frac{U(x)}{3x^2 \sqrt[3]{(x^2 - 2x + 2)^2}}. \end{aligned}$$

5/ Calcul de $f'(x)$ pour $x > 1$ et Tableau de Variations

Pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \arctan x + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 + x^2} + \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{1 + (x^2 - 1)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \arctan x + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1 + x^2} + \frac{x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Tous les termes étant strictement positifs pour $x > 1$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

Tableau de variations :

- Sur $]-\infty, \alpha[$, $f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante.
- Sur $]\alpha, 1[$, $f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante.
- Sur $]1, +\infty[$, $f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3.21	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

DimaMath.com

6/ Branches infinies

a) Au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x^2-2x+2} = 1\cdot(+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x} = 0.$$

$\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de** $-\infty$.

b) Au voisinage de $+\infty$:

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1 = 0$.

Remarquons que pour tout $x>0$, $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1 &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}\arctan x + \arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}(\sqrt{x^2-1}-x) - x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\times\arctan\frac{1}{x} + 1\\
&= \frac{\pi}{2}\times 0 + 1 - \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\times\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= 1-1\\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 1$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

7/ Démontrer $f(x)\le x-1$ sur $[0,1]$

Pour $x\in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\sqrt[3]{x^2-2x+2}$. et $x-1\le 0$, alors :

$$\begin{aligned}
f(x)-(x-1) &= (1-\frac{1}{x})\sqrt[3]{x^2-2x+2} - (x-1)\\
&= (x-1)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}}{x} - 1\right)\\
&= \frac{x-1}{x}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x+2}-x}{x}\\
&= \frac{x-1}{x}\frac{x^2-2x+2-x^3}{(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2 + x\sqrt[3]{x^2-2x+2}+x^2}\\
&= \frac{x-1}{x}\frac{(1-x)(2+x^2)}{(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2 + x\sqrt[3]{x^2-2x+2}+x^2}\\
&= -\frac{(x-1)^2}{x}\frac{2+x^2}{(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2 + x\sqrt[3]{x^2-2x+2}+x^2}.
\end{aligned}$$

Puisque $(x-1)^2\ge 0$ et $\dfrac{2+x^2}{(\sqrt[3]{x^2-2x+2})^2 + x\sqrt[3]{x^2-2x+2}+x^2} > 0$, alors $f(x)-(x-1)\le 0$

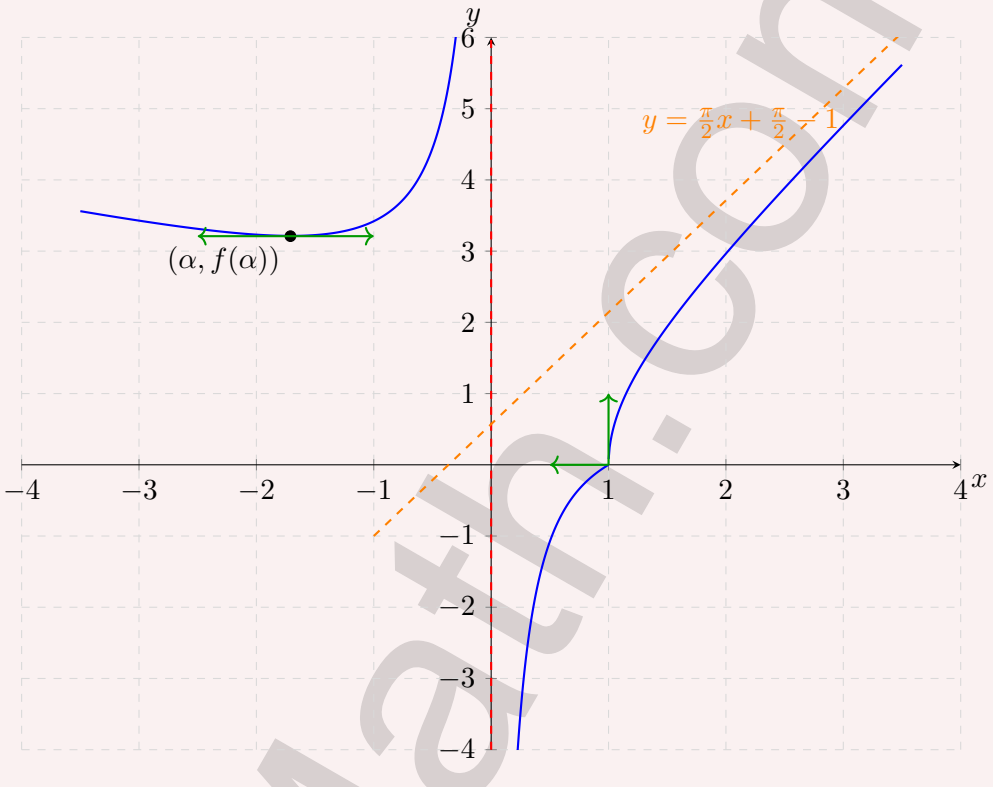
par conséquent $\quad \forall x\in]0,1]\ ;\ f(x)\le x-1$.

DimaMath.com

8/ Courbe $(\mathcal{C}_f)$

Pour tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, on synthétise les informations obtenues :

- **En $-\infty$:** La courbe présente une branche infinie (la fonction tend vers $+\infty$).
- **En $x = 1$:** La fonction présente un point anguleux (demi-tangente verticale à gauche, demi-tangente oblique à droite). $f(1) = 0$.
- **Point remarquable :** $f(\alpha) = 3{,}21$ (avec $\alpha \simeq -1.71$).
- **En $+\infty$:** La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} - 1$.



9/ Étude de la restriction g sur $I =]1, +\infty[$

a) Bijection : g est continue et strictement croissante sur $I =]1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de I vers $J = g(I) = \left]\lim\limits_{x\to 1^+} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]0, +\infty[$.

b) Courbe $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ s'obtient par symétrie de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la première bissectrice $y = x$. (Voir la figure précédente).

Solution Exercice 2

1/ Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbf{1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4}$

- Inégalité de gauche : $\mathbf{1 - x^2 \leq \dfrac{1}{1 + x^2}}$

Puisque $1 + x^2 > 0$, multiplions les deux membres par $(1 + x^2)$:

$$(1 - x^2)(1 + x^2) = 1 - x^4$$

DimaMath.com

Or, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geq 0$, donc $1 - x^4 \leq 1$. En divisant par $1 + x^2$, on a alors :

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

- Inégalité de droite : $\boldsymbol{\frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4}$

  De la même manière, développons le produit du membre de droite par $(1 + x^2)$:

$$(1 + x^2)(1 - x^2 + x^4) = 1 - x^2 + x^4 + x^2 - x^4 + x^6 = 1 + x^6$$

  Puisque $x^6 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 \leq 1 + x^6$, d'où :

$$1 \leq (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)$$

  En divisant par $1 + x^2$, on obtient :

$$\frac{1}{1 + x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{1 - x^2 \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 - x^2 + x^4}$$

2/ Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$; $|f'(x)| \leq x^4$:

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2$$

D'après la question (1), nous avons :

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$$

En retranchant $(1 - x^2)$ à chaque membre de l'encadrement, il vient :

$$0 \leq \frac{1}{1 + x^2} - (1 - x^2) \leq x^4$$

On obtient :

$$0 \leq f'(x) \leq x^4$$

Puisque $f'(x)$ est positif et inférieur ou égal à x^4, on a directement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |f'(x)| \leq x^4}$$

3/ Déduisons-en que $\forall x \in \mathbb{R}$; $|f(x)| \leq |x^5|$:

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Appliquons le **Théorème des Accroissements Finis (TAF)** à la fonction f sur l'intervalle fermé d'extrémités 0 et x (c'est-à-dire $[0, x]$ si $x > 0$, ou $[x, 0]$ si $x < 0$).

Il existe donc un réel c strictement compris entre 0 et x tel que :

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

DimaMath.com

Puisque $f(0) = \arctan(0) - 0 + \frac{0^3}{3} = 0$, cette égalité devient :

$$f(x) = f'(c) \cdot x$$

En passant aux valeurs absolues, on obtient :

$$|f(x)| = |f'(c)| \cdot |x|$$

D'après la question (2), nous savons que pour tout réel, et en particulier pour c, $|f'(c)| \leq c^4$. De plus, comme c est strictement compris entre 0 et x, on a $|c| < |x|$, ce qui implique :

$$|f'(c)| \leq c^4 < x^4$$

En injectant cette inégalité dans notre relation, il vient :

$$|f(x)| \leq x^4 \cdot |x| = |x^5|$$

Comme l'inégalité est trivialement vérifiée pour $x = 0$ ($0 \leq 0$), on conclut que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |f(x)| \leq |x^5|}$$

4/ Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\arctan x - x}{x^2} \right)$:

Par définition de $f(x)$, on peut exprimer le numérateur ainsi :

$$\arctan x - x = f(x) - \frac{x^3}{3}$$

Divisons cette expression par x^2 (pour $x \neq 0$) :

$$\frac{\arctan x - x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} - \frac{x}{3}$$

D'après la question (3), on sait que pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{f(x)}{x^2} \right| \leq \frac{|x^5|}{x^2} = |x^3|$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} |x^3| = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\arctan x - x}{x^2} \right) = 0}$$

DimaMath.com

Solution Exercice 3

Partie I

La fonction f est la restriction de la fonction **sin** à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Par définition, sa fonction réciproque $h = f^{-1}$ correspond à la fonction arcsin.

1/ Montrons que f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$:

La fonction sin est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur son intervalle image :

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1;1]$$

Sa fonction réciproque h est donc définie de $[-1;1]$ vers $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2/ **a)** Monotonie de h sur $[-1;1]$:

La fonction réciproque h a le même sens de variation sur $[-1,1]$ que la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Comme f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, alors h **est strictement croissante sur** $[-1;1]$.

b) Parité de h :

Soit $x \in [-1;1]$, alors $-x \in [-1;1]$. On a $y = h(-x) \iff \sin(y) = -x \iff \sin(-y) = x \iff -y = h(x) \iff y = -h(x) \iff h(-x) = -h(x)$. Alors la fonction h est **impaire** sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3/ Montrons que $\forall x \in [-1;1], \cos[h(x)] = \sqrt{1-x^2}$:

Par définition, pour tout $x \in [-1;1]$, $h(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle, le cosinus est positif ou nul, donc $\cos[h(x)] \geq 0$.

En utilisant l'identité trigonométrique fondamentale $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, on a :

$$\cos^2[h(x)] = 1 - \sin^2[h(x)] = 1 - x^2$$

Car $\sin[h(x)] = x$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $\cos[h(x)] \geq 0$, on prend la racine carrée positive : $\cos[h(x)] = \sqrt{1-x^2}$. Alors :

$$\forall x \in [-1;1], \cos[h(x)] = \sqrt{4-x^2}$$

4/ **Prouvons que si $h(a) + h(b) + h(c) = \frac{\pi}{2}$ alors $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$:**

Posons $\alpha = h(a)$, $\beta = h(b)$ et $\gamma = h(c)$. On a donc $\sin\alpha = a$, $\sin\beta = b$, $\sin\gamma = c$, et l'hypothèse s'écrit $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, soit $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$.

En appliquant la fonction sin :

$$c = \sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

En utilisant le résultat de la question 3, $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$ et $\cos\beta = \sqrt{1-b^2}$, d'où :

$$c = \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} - ab \implies c + ab = \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$$

En élevant au carré des deux côtés :

$$(c+ab)^2 = (1-a^2)(1-b^2) \implies c^2 + 2abc + a^2b^2 = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$$

En simplifiant les termes a^2b^2 et en réorganisant, on obtient bien : $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.

DimaMath.com

5/ On considère l'équation $(E) : h(x) + h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$:

a) Soit $\psi(x) = h(x) + h\left(\frac{x}{2}\right)$ définie sur $[-1;1]$.
Comme h est strictement croissante, la fonction ψ est la somme de deux fonctions strictement croissantes, elle est donc **strictement croissante** sur $[-1;1]$.
De plus, ψ est continue car h l'est. Calculons ses valeurs aux bornes :
$\psi(-1) = h(-1) + h(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$ et $\psi(1) = h(1) + h(1/2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.
Puisque $\frac{\pi}{3} \in]-\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}[$, d'après le théorème de la bijection , l'équation $\psi(x) = \frac{\pi}{3}$ admet une **unique solution** β **dans** $]-1;1[$.
Comme $\frac{\pi}{3} \in \psi([0,1]) = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, alors $0 < \beta < 1$.

b) Déterminons la valeur exacte de β :
Posons $\theta = h(\beta) \iff \sin\theta = \beta$. Alors :

$$\begin{aligned}
h(\beta) + h(\frac{\beta}{2}) = \frac{\pi}{3} &\iff \theta + h\left(\frac{\sin(\theta)}{2}\right) \\
&\iff h\left(\frac{\sin(\theta)}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \theta \\
&\iff \frac{\sin\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \\
&\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta \\
&\iff \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\
&\iff \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\beta^2} \\
&\iff \beta^2 = \frac{3}{7} \\
&\iff \beta = \sqrt{\frac{3}{7}}
\end{aligned}$$

D'où la valeur exacte de β : $\boldsymbol{\beta = \sqrt{\frac{3}{7}}}$.

Partie II

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{x+1}\right) & ; -1 \le x < 0 \\ g(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) & ; x \ge 0 \end{cases}$$

1/ **a)** Domaine de définition :

- Pour $g(x) = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{x+1}\right)$, $x \in D_g \iff x+1 \ge 0$, et $\sqrt{x+1} \le 1$ et $-1 \le x < 1$, donc g est définie sur $[-1,0[$.
- Pour $g(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$, $x \in D_g \iff x \in [0;+\infty[$. Donc g est définie sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, la fonction g est bien **définie sur** $[-1;+\infty[$.

b) Continuité de g :

- Sur $[-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$
  g est continue comme composée et somme de fonctions continues.
- Continuité en 0 :
  On a : $g(0)=\frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1}h(\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}h(1)=\frac{\pi}{4}$
  $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}=g(0)$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(0)$, g **est continue en** 0**, et donc sur** $[-1;+\infty[$.

2/ a) Dérivabilité à droite en -1 :

Calculons $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\frac{1}{2}h(\sqrt{x+1})-0}{x+1}$.

En posant $u=\sqrt{x+1}$, on a $u\to 0^+$ lorsque $x\to(-1)^+$, d'où :

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}h(u)}{u^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{h(u)}{u}\cdot\dfrac{1}{u}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(+\infty)=+\infty$. Donc :

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\infty$, par conséquent g **n'est pas dérivable à droite en** -1.

b) Dérivabilité à gauche en 0 :

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{2}h(\sqrt{x+1})-\frac{\pi}{4}}{x}$. Utilisons le changement de variable suggéré $t=h\left(\sqrt{x+1}\right)-\frac{\pi}{2}$, on a $\sqrt{x+1}=\sin(t+\frac{\pi}{2})=\cos t$.

Donc $x+1=\cos^2 t\implies x=\cos^2 t-1=-\sin^2 t$. Quand $x\to 0^-$, $t\to 0^-$. Alors

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{2}(t+\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{4}}{-\sin^2 t}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-1}{2t}\left(\dfrac{t}{\sin t}\right)^2=+\infty$. Donc :

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=+\infty$. Par conséquent **la fonction** g **n'est pas dérivable à gauche en 0**.

c) Dérivabilité à droite en 0 :

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\arctan(\sqrt{1+x^2}-x)-\frac{\pi}{4}}{x}$.

Utilisons le changement de variable $t=\sqrt{1+x^2}-x\iff t^2-2tx+x^2=1+x^2\iff x=\dfrac{1-t^2}{2t}$. Quand $x\to 0^+$, $t\to 1^-$. D'où

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{\arctan t-\frac{\pi}{4}}{\frac{1-t^2}{2t}}=\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{\arctan t-\arctan 1}{t-1}\dfrac{t-1}{\frac{1-t^2}{2t}}=(\arctan)'(1)\times$

$\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{-2t}{1+t}=\dfrac{1}{2}\times(-1)=-\dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent **la fonction** g **est dérivable à droite en** 0 et $\boldsymbol{g'_d(0)=-\dfrac{1}{2}}$.

d) Interprétations géométriquement :

- Puisque $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\infty$ alors la courbe $(\mathcal{C}_g)$ admet une **demi-tangente verticale** dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse -1.
- Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=+\infty$ alors la courbe $(\mathcal{C}_g)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche du point d'abscisse 0.
- Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\dfrac{1}{2}$ alors la coube $(\mathcal{C}_g)$ admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}$.
  Le point $(0,\frac{\pi}{4})$ **est un point anguleux**.

Dimamath.com

3/ Tableau de variation de g :

Sur $]-1;0[$, $g'(x)>0$ car le dénominateur est strictement positif. Donc g est strictement croissante sur $[-1;0]$.
Sur $]0;+\infty[$, $g'(x)<0$, donc g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	
$g(x)$		0	$\nearrow$ $\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0

(Remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0^+ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\arctan(0)=0$).

4/ Étude de la restriction φ à $I=[0;+\infty[$:

a) Sur I, $\varphi(x)=g(x)$. Soit $k(x)=\varphi(x)-x$. Donc $k(0)=\frac{\pi}{4}>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=-\infty$. Comme φ et $-x$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}^+$, alors k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En plus $0\in k\left(\mathbb{R}^+\right)=\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ alors d'après un corollaire du TVI, l'équation $k(x)=0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\forall x\in\mathbb{R}^+; g(x)\leq\frac{\pi}{4}$, alors $\forall x\in\mathbb{R}^+; g(x)<1$ par suite $k(1)<0$ d'où $k(1<k(\beta)<k(0)$ et comme k est strictement décroissante alors $0<\beta<1$.

b) φ est continue et strictement décroissante sur $I=[0;+\infty[$. Elle réalise une bijection de I vers $J=]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x);\varphi(0)]=]0;\frac{\pi}{4}]$.

c) Calcul de $\varphi(x)$:
Soit $x\in\mathbb{R}^+$, posons $x=\tan\theta$ donc $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et $\theta=\arctan x$.
Alors $\sqrt{1+x^2}-x=\sqrt{1+\tan^2\theta}-\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right).$$

Comme $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow 0<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\leq\dfrac{\pi}{4}$, alors $\varphi(x)=\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\arctan x}{2}\right)\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\arctan x}{2}$.

d) Calcul de $\varphi^{-1}(x)$:
Soit $x\in]0;\frac{\pi}{4}]$ et $y\in[0;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\varphi(y)=x &\iff \frac{\pi}{4}-\frac{\arctan y}{2}=x\\ &\iff \arctan y=\frac{\pi}{2}-2x\\ &\iff y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\frac{1}{\tan(2x)}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi^{-1}(x)=\dfrac{1}{\tan(2x)}}$.

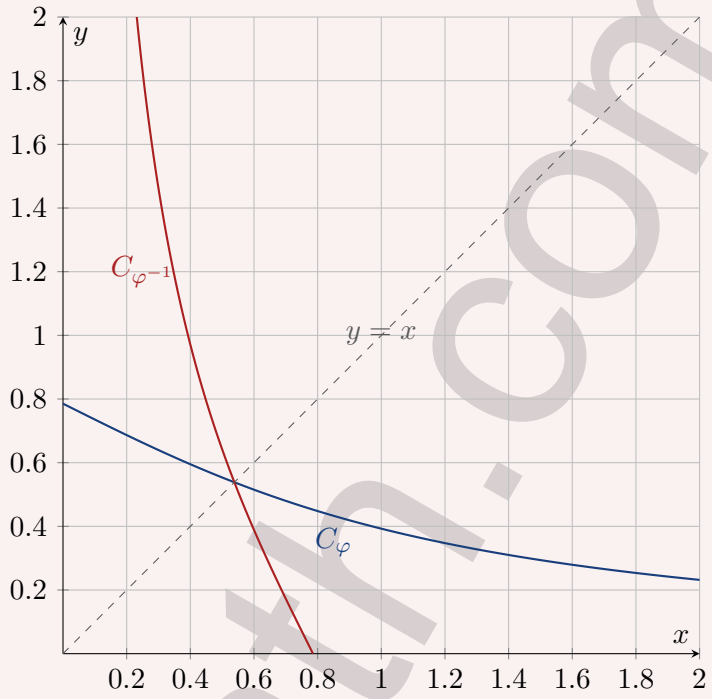
Dimamath.com

5/ Courbe représentative de φ et φ^{-1} :

a) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, la courbe $(\mathcal{C}\varphi)$ admet une **asymptote horizontale d'équation** $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

b) Pour construire les courbes, tracez $\varphi(x)$ partant de $(0,\frac{\pi}{4})$ décroissant vers $y=0$, puis construisez $(\mathcal{C}\varphi^{-1})$ par **symétrie axiale** par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Légende



Solution Exercice 4

1/ Continuité de f en 0 :

- On a : $f(0)=\sqrt[3]{0}-\arctan(0)=0$.
- Limite à droite : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt[3]{x}-\arctan x\right)=0=f(0)$.
- Limite à gauche : $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x-1+\sqrt{x^2+1}\right)=0-1+\sqrt{1}=0=f(0)$.

Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$, alors la fonction f est **continue en** 0.

2/ Montrons que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \arctan x\le x$:
Soit $h(x)=x-\arctan x$ définie sur $\mathbb{R}^+$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$h'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}\ge0$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que pour tout $x\ge0$, $h(x)\ge h(0)$, et comme $h(0)=0$, alors $h(x)\ge0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+;\arctan x\le x}$$

.

DimaMath.com

3/ a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$

- Pour $x = 0$, l'inégalité est vérifiée
- Montrons que pour tout $x > 0$; $x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$

  Soit $x > 0$, posons $G(t) = \arctan t - t + \frac{t^3}{3}$ pour tout $t \in [0, x]$.
  G est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc en particulier continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, avec $G'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 + t^2 = \frac{t^4}{1+t^2}$.
  D'après le TAF, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$G(x) - G(0) = G'(c) \cdot x \implies \arctan x - x + \frac{x^3}{3} = \frac{c^4}{1+c^2} \cdot x$$

  Puisque $x > 0$ et $\frac{c^4}{1+c^2} \geq 0$, on a :$G(x) \geq 0$, d'où :

$$x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}$$

  .
- Montrons que pour tout $x > 0$; $x - \arctan x \geq \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$

  Soit $x > 0$, posons $H(t) = \arctan t - t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}$ pour tout $t \in [0, x]$.
  H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en particulier elle est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, avec $H'(t) = \frac{1}{1+t^2} - (1 - t^2 + t^4) = -\frac{t^6}{1+t^2}$.
  D'après le TAF, il existe $d \in]0, x[$ tel que :

$$H(x) - H(0) = H'(d) \cdot x \implies \arctan x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} = -\frac{d^6}{1+d^2} \cdot x$$

  Puisque $x > 0$ et $-\frac{d^6}{1+d^2} \leq 0$, on a $H(x) \leq 0$, d'où :

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \arctan x$$

  .

Conclusion :
D'après les trois relations précédentes , on conclut que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}}$$

b) Dérivabilité de f en 0 :

- À gauche en $0 (x \to 0^-)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right) \\
&= \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1} + 1)}\right) \\
&= \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

  Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$.

DimaMath.com

- À droite en $0 (x \to 0^+)$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}-\arctan x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{\arctan x}{x}\right)$$
$$= +\infty - 1$$
$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$, d'où :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

Alors la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

Conclusion : La fonction f n'est pas dérivable à droite en 0 et elle est dérivable à gauche en 0. Par conséquent, f **n'est pas dérivable en** 0.

4/ Variations de la fonction f :

- Sur $]-\infty, 0[$:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Puisque $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = -x$ (car $x < 0$), alors $\forall x < 0$; $\sqrt{1+x^2}+x > 0$. Donc $\forall x < 0$; $f'(x) > 0$. Par conséquent la fonction f est **strictement croissante** sur $]-\infty, 0[$.

- Sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-3x^{2/3}}{3x^{2/3}(1+x^2)}$$

Posons $u = x^{2/3} > 0$, le numérateur devient $P(u) = 1+u^3-3u$. Étudions le signe de $P(u)$, pour cela dressons le tableau de variation de P sur $\mathbb{R}^+$. On a $P'(u) = 3u^2-3 = 3(u-1)(u+1)$. Doù le tableau de variation de P sur $\mathbb{R}^+$:

u	0		1		$+\infty$
$P'(u)$		$-$	0	$+$	
$P(u)$	1	↘	-1	↗	$+\infty$

On montre que l'équation $P(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $\mathbb{R}^+$ tels que $0.3 < \alpha < 0.4$ et $1.5 < \beta < 1.6$ Donc par composition l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = \alpha^{3/2}$ et $x_2 = \beta^{3/2}$ telles que $0.15 < x_1 < 0.25$ et $1.83 < x_2 < 2$. Donc :

- sur $]0, x_1[$: $f'(x) > 0$. donc f est croissante.
- sur $]x_1, x_2[$: $f'(x) < 0$. donc f est décroissante.
- sur $]x_2, +\infty[$: $f'(x) > 0$. donc f est croissante.

- Tableau de variation de f :

Dimamath.com

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	0	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

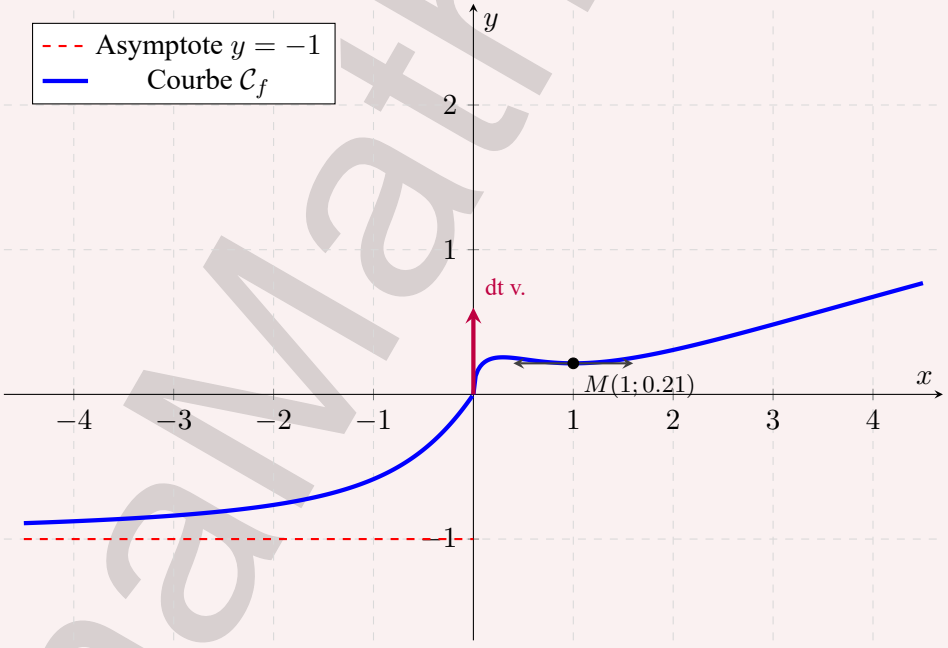
Avec : $f(x_1) \simeq 0.36$ et $f(x_2) \simeq 0.18$.

5/ Courbe représentative $\mathcal{C}$:

(a) Branches infinies :

- En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - 1 + |x|\sqrt{1+1/x^2}) = -1$. La droite d'équation $\boxed{y=-1}$ est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.
- En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La courbe admet une **branche parabolique** de direction l'axe des abscisses (Ox).

(b) Construction :
La courbe part de l'asymptote $y=-1$, croît jusqu'à $(0,0)$ avec une demi-tangente de pente 1 à gauche et verticale à droite, descend vers son minimum local en $x=1$ (où $f(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,21$), puis remonte vers $+\infty$.



6/ Restriction g sur $I = \mathbb{R}^*_-$ et sa bijection réciproque :
Sur I, $g(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$. La fonction g est continue et strictement croissante sur I. Elle réalise donc une bijection de I vers l'intervalle : $J =]\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to0^-} g(x)[$. Donc

$$J = \boxed{]-1, 0[}$$

DimaMath.com

Soient $y \in I$ et $x \in J$,

$$\begin{aligned} y = g^{-1}(x) &\iff g(y) = x \\ &\iff y - 1 + \sqrt{1+y^2} = x \\ &\iff \sqrt{1+y^2} = (x+1) - y \\ &\iff 1 + y^2 = (x+1)^2 - 2(x+1)y + y^2 \text{ car} x+1 > 0 \text{ et } y < 0 \\ &\iff 2(x+1)y = x^2 + 2x \end{aligned}$$

Puisque $x \in]-1, 0[$, $x + 1 \neq 0$, alors :

$$y = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)}$$

D'où, pour tout $x \in]-1, 0[$:

$$\boxed{g^{-1}(x) = \frac{x(x+2)}{2(x+1)}}$$

Solution Exercice 5

1/ a) Continuité en -1 :

- Continuité à droite en -1 :
  Posons $t = \sqrt{x+1}$. Quand $x \to -1^+$, $t \to 0^+$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \left(1 + \frac{\arctan(t)}{t}\right) = 1 + 1 = 2 = f(-1)$$

- Continuité à gauche de -1 :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(x + 3 - \sqrt{-1-x}\right) = -1 + 3 - 0 = 2 = f(-1)$$

- Conclusion : Puisque $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = 2 = f(-1)$, alors la fonction f est continue en -1.

b) Limite en $+\infty$:

Quand $x \to +\infty$, $\sqrt{x+1} \to +\infty$, donc $\arctan\left(\sqrt{x+1}\right) \to \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\arctan\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}} = 0$.

D'où : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

Interprétation géométrique : La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

c) Branche infinie au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + 3 - \sqrt{-1-x}\right) = -\infty$$

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\forall x < -1 \; ; \; \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{\sqrt{-1-x}}{x} = 1 + \frac{3}{x} + \sqrt{\frac{-1-x}{x^2}} = 1 + \frac{3}{x} + \sqrt{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}$$

DimaMath.com

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.
Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$:

$$\forall x<-1\ ;\ f(x)-x=3-\sqrt{-1-x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=3-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-1-x}=-\infty$.
Par conséquent : La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$.

2/ a) Calcul de $\varphi_a(0)$ et $\varphi_a(a)$:

$$\varphi_a(0)=(\arctan(a)-a)\cdot 0^3-(\arctan(0)-0)a^3=0$$

$$\varphi_a(a)=(\arctan(a)-a)a^3-(\arctan(a)-a)a^3=0$$

La fonction φ_a est continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]0,a[$ tel que $\varphi_a'(c)=0$. Calculons la dérivée de φ_a :

$$\varphi_a'(x)=3(\arctan(a)-a)x^2-\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)a^3=3(\arctan(a)-a)x^2+\frac{x^2}{1+x^2}a^3$$

Ainsi, $\varphi_a'(c)=0\iff 3(\arctan(a)-a)c^2+\frac{c^2}{1+c^2}a^3=0$. Comme $c>0$, on peut simplifier par c^2 :

$$3(\arctan(a)-a)+\frac{a^3}{1+c^2}=0\iff 3(\arctan(a)-a)=\frac{-a^3}{1+c^2}$$
$$\iff \frac{\arctan(a)-a}{a^3}=\frac{-1}{3(1+c^2)}$$

b) Dérivabilité à droite en -1 : Étudions le taux d'accroissement à droite en -1 :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{1+\frac{\arctan(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}-2}{x+1}=\frac{\frac{\arctan(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}-1}{x+1}$$

En posant $a=\sqrt{x+1}$ (avec $a>0$ car $x>-1$), l'expression devient :

$$\frac{\frac{\arctan(a)}{a}-1}{a^2}=\frac{\arctan(a)-a}{a^3}$$

D'après la question précédente, cette expression est égale à $\frac{-1}{3(1+c^2)}$ avec $0<c<a$. Quand $x\to-1^+$, $a\to0^+$, ce qui implique que $c\to0^+$.

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{c\to0^+}\frac{-1}{3(1+c^2)}=-\frac{1}{3}$$

La fonction f est donc dérivable à droite en -1 et $f_d'(-1)=-\frac{1}{3}$.

c) Dérivabilité à gauche en -1 :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}&=\frac{x+3-\sqrt{-1-x}-2}{x+1}\\&=\frac{x+1-\sqrt{-1-x}}{x+1}\\&=1-\frac{\sqrt{-1-x}}{-(\sqrt{-1-x})^2}\\&=1+\frac{1}{\sqrt{-1-x}}\end{aligned}$$

DimaMath.com

Quand $x \to -1^-$, $\sqrt{-1-x} \to 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable à gauche en -1 (la courbe admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut).

3/ **a)** Variations sur $]1-\infty;-1[$: Pour $x<-1$, $f(x)=x+3-\sqrt{-1-x}$. La fonction est dérivable et :

$$f'(x)=1-\frac{-1}{2\sqrt{-1-x}}=1+\frac{1}{2\sqrt{-1-x}}>0$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$.

b) Calcul de la dérivée pour $x>-1$: Posons $u(x)=\sqrt{x+1}$, d'où $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Alors $f(x)=1+\frac{\arctan(u(x))}{u(x)}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\cdot u(x)-u'(x)\arctan(u(x))}{u(x)^2}=\frac{u'(x)}{u(x)^2}\left(\frac{u(x)}{1+u(x)^2}-\arctan(u(x))\right)$$

Comme $\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+1)}=\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$ et $u(x)^2=x+1$, on obtient :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}-\arctan\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$$

c) Inégalité pour $t\in[0;+\infty[$: Soit $h(t)=\frac{t}{1+t^2}-\arctan(t)$. La fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$:

$$h'(t)=\frac{1\cdot(1+t^2)-t\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}-\frac{1}{1+t^2}=\frac{1-t^2-(1+t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{-2t^2}{(1+t^2)^2}\le 0$$

La fonction h est décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme $h(0)=0$, on a $h(t)\le 0$ pour tout $t\ge 0$. De plus, comme $\frac{t}{1+t^2}>0$ pour $t>0$ et $\arctan(t)<\frac{\pi}{2}$, on a clairement $h(t)>-\frac{\pi}{2}$. D'où : $-\frac{\pi}{2}<\frac{t}{1+t^2}-\arctan(t)\le 0$.

d) Variations de f sur $]-1;+\infty[$ et tableau de variation : En posant $t=\sqrt{x+1}>0$ dans l'expression de $f'(x)$, le terme entre parenthèses est exactement $h(t)$. Puisque $h(t)<0$ pour tout $t>0$, on en déduit que $f'(x)<0$ sur $]-1;+\infty[$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

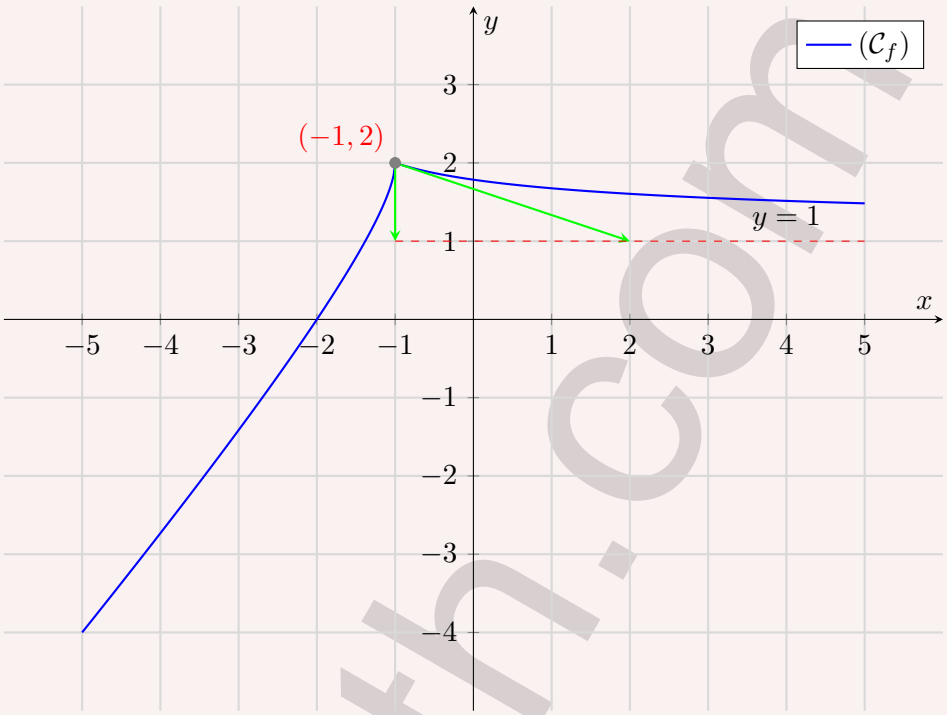
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1

4/ **a)** Existence et unicité de α : Sur l'intervalle $I=[-1;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $J=]1;2]$. Comme $0\notin J$, l'équation $f(x)=x$ n'a pas de solution si $x\le 1$ ou $x>2$. Considérons la fonction $k(x)=f(x)-x$ sur $[1;2]$. Elle est continue et strictement décroissante car f décroît et $-x$ décroît. $k(1)=f(1)-1=1+\dfrac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}-1=\dfrac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}>0$

Dimamath.com

$k(2) = f(2) - 2 = 1 + \dfrac{\arctan(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} - 2 = \dfrac{\pi/3}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1$ Comme $\pi \approx 3,14$ et $3\sqrt{3} \approx 5,19$, $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} < 1$, donc $k(2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $k(x) = 0 \iff f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$.

b) Courbe $(\mathcal{C}_f)$:



5/ **a)** g est la restriction de f à $I = [-1;+\infty[$. D'après ce qui précède, g est continue et strictement décroissante, donc elle induit une bijection de I vers $J =]1;2]$. La courbe de g^{-1} se construit par symétrie axiale de celle de g par rapport à la droite $y = x$.

b) Dérivabilité de g^{-1} en α : On a $g(\alpha) = \alpha$. Comme g est dérivable en α et $g'(\alpha) \neq 0$, alors g^{-1} est dérivable en α et : $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{1}{g'(\alpha)}$

Exprimons $g'(\alpha)$ en utilisant la relation $g(\alpha) = \alpha \iff 1 + \dfrac{\arctan(\sqrt{\alpha+1})}{\sqrt{\alpha+1}} = \alpha \iff \arctan(\sqrt{\alpha+1}) = (\alpha-1)\sqrt{\alpha+1}$. Injectons cela dans la formule de la dérivée :

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{1}{2\sqrt{(\alpha+1)^3}}\left(\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha+2} - (\alpha-1)\sqrt{\alpha+1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha+1}}{2(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}}\left(\frac{1}{\alpha+2} - (\alpha-1)\right) \\ &= \frac{1}{2(\alpha+1)}\left(\frac{1-(\alpha-1)(\alpha+2)}{\alpha+2}\right) \\ &= \frac{1-(\alpha^2+\alpha-2)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \\ &= \frac{3-\alpha-\alpha^2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \end{aligned}$$

Ainsi : $\boldsymbol{(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{2(\alpha+1)(\alpha+2)}{3-\alpha-\alpha^2}}$.

DimaMath.com

6/ Majoration de $|f'(x)|$ sur $[0;+\infty[$:

Pour $x \in [0;+\infty[$, $t = \sqrt{x+1} \geq 1$. D'après la question 3(c), on a : $\left|\frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)\right| \leq \frac{\pi}{2}$

De plus, le coefficient devant la parenthèse dans $f'(x)$ est $\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} = \frac{1}{2t^3}$. Comme $t \geq 1$, $\frac{1}{2t^3} \leq \frac{1}{2}$. Cependant, affinons la majoration directe de l'expression : Le terme dans la parenthèse est $h(t) = \frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)$. Comme $t \geq 1$, $\arctan(t) \geq \frac{\pi}{4}$. Comme $h(t) \leq 0$, on a $|h(t)| = \arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$. En combinant avec $\frac{1}{2t^3} \leq \frac{1}{2}$, on obtient $|f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$.

7/ **a)** Montrons par récurrence que $1 \leq u_n < 2$:

- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 < 2$ est vrai.
- Hérédité : Supposons que $1 \leq u_n < 2$. Comme f est strictement décroissante sur $[1;2[$: $1 \leq u_n < 2 \implies f(2) < f(u_n) \leq f(1)$ On a déjà vu que $f(1) = 1 + \frac{\arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} < 2$ (car $\arctan(\sqrt{2}) < \sqrt{2}$). Et $f(2) = 1 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} > 1$. Donc $1 < u_{n+1} < 2$, ce qui valide l'hérédité.

b) Inégalité des accroissements finis : La fonction f est dérivable sur $[1;2]$. Pour tout $x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée entre u_n et α (qui appartiennent tous deux à $[1;2]$) : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{\pi}{4}|u_n - \alpha| \implies |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|u_n - \alpha|$

c) Convergence et limite de u_n : Par récurrence immédiate, on montre que : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ Comme $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc la suite (u_n) converge vers α.

DimaMath.com