Série Corriée 3

Théorème de Thalès

3 APIC

S. EL JAAFARI

I– Énoncés des exercices

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AC = 5$ et $BC = 4$.
La médiatrice de $[AB]$ coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N.

1/ Construire une figure convenable.

2/ Montrer que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{2}$.

3/ Calculer la valeur de MN.

4/ Soit E un point de $[AC]$ tel que $CE = 2$ et F un point de $[BC]$ tel que $CF = 1,6$.
Montrer que : $(EF) \parallel (BA)$.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[DC]$, de hauteur $[AD]$ tel que $AD = 3$ cm, $DC = 6$ cm et $AB = 2$ cm. Soit M le projeté orthogonal de B sur la droite (DC).

1/ Montre que la distance $BC = 5$ cm.

2/ La droite (BC) coupe la droite (AD) en N.

a) Justifie que $(DN) \parallel (MB)$.

b) Calcule la distance CN.

3/ Marque E sur $[AD]$ tel que $AE = 2,1$ cm. La parallèle à (DC) passant par E coupe (CB) en F.
Calcule la distance BF.

Exercice 3

Soit $EFGH$ un rectangle de centre O tel que : $EF = 7$ cm et $FG = 4$ cm. La droite qui passe par le point O et parallèle à (FG) coupe (EF) en I.

1/ Construire une figure.

2/ Montrer que : I est le milieu de $[EF]$.

3/ Montrer que : $OI = 2$ cm.

Soit J le milieu de $[EH]$,

Dimath.com

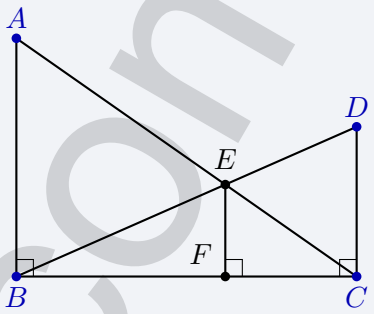
4/ Montrer que : $(IJ) \parallel (FH)$.

La droite (IJ) coupe (EG) en M.

5/ Montrer que : M est le milieu de $[EO]$.

Exercice 4

Dans la figure ci-contre : les droites (AB), (EF) et (DC) sont perpendiculaires à la droite (BC).



1/ Montrer que :
$(AB) \parallel (EF)$ et $(DC) \parallel (EF)$.

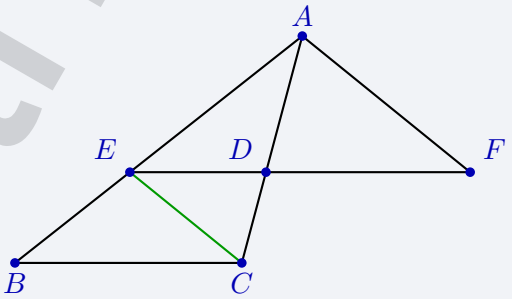
2/ Montrer que : $\dfrac{CF}{BC} = \dfrac{EF}{AB}$

3/ Montrer que : $\dfrac{BF}{BC} = \dfrac{EF}{DC}$

4/ Déduire que : $\dfrac{1}{EF} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{DC}$

Exercice 5

Soit ABC un triangle dans lequel on a tracé une droite (ED) parallèle à la droite (BC). On donne $AE = BC = 3$ et $EB = AD = 2$.



1/ Calculer AC, puis DC.

2/ Calculer ED.

3/ F est un point de (DE) tel que $DF = 2,7$.
Les droites (EC) et (AF) sont-elles parallèles ?

Exercice 6

1/ **a)** Construire un triangle ABC tel que : $AB = 6$ cm ; $BC = 8$ cm ; $AC = 10$ cm.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2/ Sur le segment $[BC]$, on place le point I tel que :

$$CI = \frac{1}{4}CB$$

La parallèle à (AB) passant par I coupe (AC) en J. Compléter la figure puis calculer CJ et IJ.

3/ Sur le segment $[CB]$, on considère maintenant le point M tel que $CM = x$. La parallèle à (AB) passant par M coupe (AC) en K.

a) Calculer MK en fonction de x.

b) Montrer que l'aire CMK est égale à $\dfrac{3x^2}{8}$.

c) Trouver la valeur de x pour que l'aire du triangle CMK soit la moitié de celle du triangle ABC.

DimaMath.com

Exercice 7

ABC est un triangle isocèle en A. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H. On donne $BC = 6$ cm et $AH = 4$ cm.
Soit M un point du segment $[BH]$ tel que $BM = x$. La parallèle à la droite (AH) passant par M coupe la droite (AB) en P et la droite (AC) en Q.

1/ Montrer que $\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{x}{3}$, puis en déduire MP en fonction de x.

2/ Exprimer MC en fonction de x.

3/ Montrer que $MQ = \dfrac{4}{3}(6 - x)$.

4/ Pour quelle valeur de x a-t-on $MQ = 3MP$?

5/ Quelle serait alors la position du point P sur le segment $[AB]$?

Exercice 8

1/ Construire un triangle IMK tel que $IM = 6$ cm, $MK = 4{,}5$ cm et $IK = 7{,}5$ cm.

2/ Démontrer que IMK est un triangle rectangle.

3/ H est le pied de la hauteur issue de M. Placer H et justifier que $MH = 3{,}6$ cm.

4/ Calculer IH et KH.

5/ Marquer L sur $[IM]$ et F sur $[MK]$ tels que $IL = 3{,}6$ cm et $KF = \dfrac{3}{5}MK$. Démontrer que $(LF) \parallel (IK)$. Calculer LF.

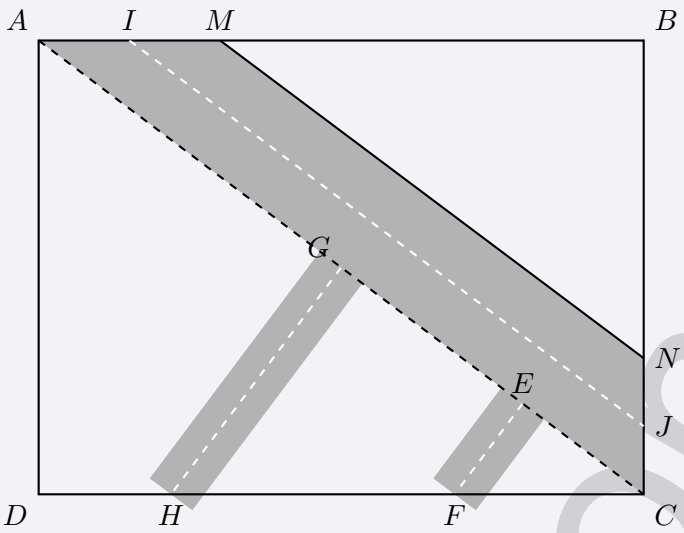
6/ La perpendiculaire à (IK) passant par K coupe (IM) en E. Placer E et justifier que (MH) et (KE) sont parallèles, puis calculer ME et EK.

7/ Donner la nature exacte du quadrilatère $MEKH$, calculer son aire et son périmètre.

Exercice 9

La figure ci-dessous représente un champ rectangulaire $ABCD$ traversé par une route principale de largeur $\mathcal{L}$ et deux routes secondaires de même largeur. I est le milieu de $[AM]$ et J le milieu de $[CN]$.
On donne $AB = 80$, $BC = 60$, $AM = 24$. Les droites (AC) et (MN) sont parallèles.

DimaMath.com



1/ **a)** Montrer que $AC = 100$.

b) En déduire que $MN = 70$ et $BN = 42$.

2/ Calculer IJ.

3/ On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la route principale.

a) Montrer que $\mathcal{A} = 1224$.

b) En déduire que $\mathcal{L} = 14{,}4$.

4/ On donne $CE = 20$, $CG = 50$, $DH = 17{,}5$, $CF = 25$. Les points A, G, E et C sont alignés.

a) Calculer CH.

b) Démontrer que les droites (GH) et (EF) sont parallèles.

Exercice 10

$ABCD$ est un rectangle de 12 cm de longueur et 9 cm de largeur. E est un point de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F et la parallèle à (CD) passant par F coupe (AD) en G.

1/ On suppose dans cette question que $AE = 3$ cm.

a) Montrer que $AC = 15$ cm.

b) Calculer AF.

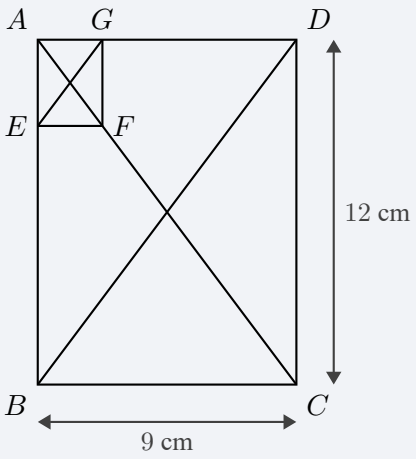
2/ Montrer que $(EG) \parallel (BD)$.

3/ On suppose que $AE = x$.

a) Quelles sont les valeurs minimales et maximales de x ?

b) Montrer que $AG = \frac{3}{4}x$.

c) Exprimer le périmètre du rectangle $AEFG$ en fonction de x.



DimaMath.com

II– Corrigés de exercices

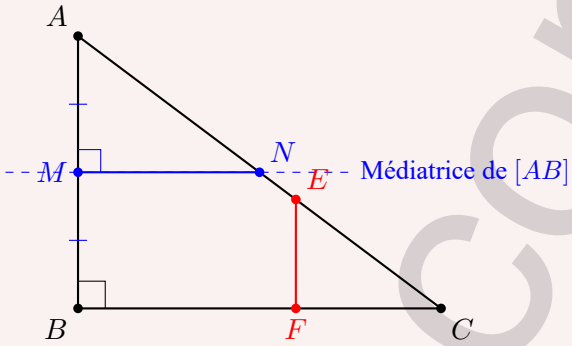
Solution Exercice 1

1/ Construction d'une figure :

Calculons AB à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{donc} \quad AB^2 = AC^2 - BC^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

D'où $AB = \sqrt{9} = 3$.



2/ Montrons que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{2}$:

- La droite (MN) est la médiatrice du segment $[AB]$ et coupe $[AB]$ en M. Par définition, M est donc le milieu de $[AB]$, ce qui donne :

$$AM = \frac{1}{2}AB \quad \text{donc} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$$

- On sait que $(MN) \perp (AB)$ (car (MN) est la médiatrice de $[AB]$) et $(BC) \perp (AB)$ (car ABC est rectangle en B).
  Or, deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entre elles, donc : $(MN) \parallel (BC)$.
- Dans le triangle ABC, on a $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème direct de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Comme $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{AM}}{\boldsymbol{AB}} = \frac{\boldsymbol{AN}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}}$$

3/ Calcul de la valeur de MN :

D'après l'égalité de Thalès établie à la question précédente :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad MN = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{MN = 2}}$$

4/ Montrons que $(EF) \parallel (BA)$:

Calculons séparément les rapports $\dfrac{CE}{CA}$ et $\dfrac{CF}{CB}$:

DimaMath.com

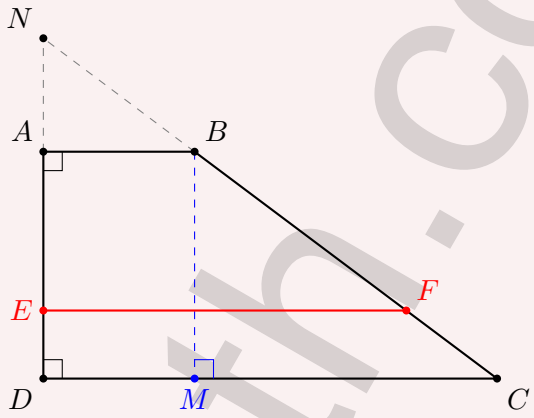
- $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{2}{5} = 0,4$
- $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{1,6}{4} = \dfrac{16}{40} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

On constate que $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CF}{CB}$.
De plus, les points C, E, A d'une part et C, F, B d'autre part sont alignés dans le même ordre.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on conclut que :

$$\boxed{(EF) \parallel (BA)}$$

Solution Exercice 2

1/ Construction d'une figure



2/ Montrons que la distance $BC = 5$ cm :

- $ABCD$ est un trapèze rectangle de hauteur $[AD]$, donc $(AD) \perp (DC)$ et $(AB) \parallel (DC)$.
- M est le projeté orthogonal de B sur (DC), donc $(BM) \perp (DC)$ et $M \in [DC]$.
- Le quadrilatère $ABMD$ possède trois angles droits (en A, D et M), c'est donc un rectangle. Par conséquent :

$$BM = AD = 3 \text{ cm} \quad \text{et} \quad DM = AB = 2 \text{ cm}$$

- Comme $M \in [DC]$, on a : $MC = DC - DM = 6 - 2 = 4$ cm.
- Dans le triangle BMC rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BM^2 + MC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

D'où $BC = \sqrt{25} = 5$ cm. Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{BC = 5} \text{ cm}}$

3/ **a)** Justification de $(DN) \parallel (MB)$:
Les points A, D, N sont alignés, donc les droites (DN) et (AD) sont confondues.
Or, $(AD) \perp (DC)$ et $(MB) \perp (DC)$.
et comme deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entre elles, donc :

$$\boxed{(DN) \parallel (MB)}$$

b) Calcul de la distance CN :
Dans le triangle NDC, on a $B \in [NC]$, $M \in [DC]$ et $(MB) \parallel (DN)$.

DimaMath.com

D'après le théorème direct de Thalès :

$$\frac{CB}{CN} = \frac{CM}{CD} = \frac{MB}{ND}$$

En utilisant l'égalité $\frac{CB}{CN} = \frac{CM}{CD}$ avec $CB = 5$, $CM = 4$ et $CD = 6$:

$$\frac{5}{CN} = \frac{4}{6} \quad \text{donc} \quad CN = \frac{5 \times 6}{4} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ cm}$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{CN = 7,5} \text{ cm}}$$

4/ Calcul de la distance BF :

- La droite (EF) est parallèle à (DC), et comme $(AB) \parallel (DC)$, on en déduit que $(EF) \parallel (AB)$.
- Dans le triangle NDC, on a $E \in [AD]$, $F \in [BC]$ et $(EF) \parallel (DC)$. En appliquant le théorème de Thalès entre les parallèles (AB), (EF) et (DC) coupées par les sécantes (AD) et (BC) :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$$

- On remplace par les valeurs connues ($AE = 2,1$ cm, $AD = 3$ cm et $BC = 5$ cm) :

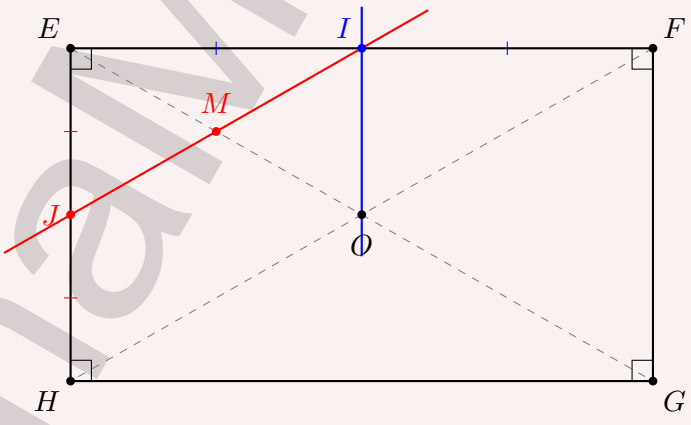
$$\frac{2,1}{3} = \frac{BF}{5} \quad \text{donc} \quad BF = \frac{2,1 \times 5}{3} = 0,7 \times 5 = 3,5 \text{ cm}$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{BF = 3,5} \text{ cm}}$$

Solution Exercice 3

1/ Construction de la figure :



2/ Montrons que I est le milieu de $[EF]$:

- $EFGH$ est un rectangle de centre O, donc ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en leur milieu O. En particulier, O est le milieu de $[EG]$.
- Dans le triangle EFG, la droite (OI) passe par le milieu O du côté $[EG]$ et est parallèle au côté (FG).

Dimamath.com

- D'après la propriété de la droite des milieux dans un triangle (la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu), la droite (OI) coupe $[EF]$ en son milieu.
- Par conséquent, $\boxed{\boldsymbol{I} \text{ est le milieu de } [\boldsymbol{EF}]}$.

3/ Montrons que $OI = 2$ cm :

- Dans le triangle EFG, O est le milieu de $[EG]$ et I est le milieu de $[EF]$.
- D'après le théorème de la droite des milieux, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est égale à la moitié de la longueur du troisième côté :

$$OI = \frac{FG}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$$

Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{OI = 2}\text{ cm}}$

4/ Montrons que $(IJ) \parallel (FH)$:

- Dans le triangle EFH, on sait que I est le milieu de $[EF]$ et J est le milieu de $[EH]$.
- D'après le théorème de la droite des milieux, la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.
- On en conclut que : $\boxed{\boldsymbol{(IJ) \parallel (FH)}}$

5/ Montrons que M est le milieu de $[EO]$:

- $EFGH$ est un rectangle de centre O, donc O est le milieu de $[FH]$, ce qui signifie que les droites (FH) et (OH) sont confondues.
- Comme $(IJ) \parallel (FH)$, on a également $(JM) \parallel (OH)$ (car $M \in (IJ)$).
- Dans le triangle EOH, la droite (JM) passe par le milieu J du côté $[EH]$ et est parallèle au côté (OH).
- D'après la propriété de la droite des milieux, la droite (JM) coupe le troisième côté $[EO]$ en son milieu. Comme (IJ) coupe (EG) en M, alors $\boxed{\boldsymbol{M} \text{ est le milieu de } [\boldsymbol{EO}]}$.

Solution Exercice 4

1/ Montrons que $(AB) \parallel (EF)$ et $(DC) \parallel (EF)$:

- On sait que $(AB) \perp (BC)$ et $(EF) \perp (BC)$.
  Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles. Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{(AB) \parallel (EF)}}$$

- De même, on sait que $(DC) \perp (BC)$ et $(EF) \perp (BC)$.
  Pour la même propriété géométrique, on conclut que :

$$\boxed{\boldsymbol{(DC) \parallel (EF)}}$$

2/ Montrons que $\dfrac{CF}{BC} = \dfrac{EF}{AB}$:

- Dans le triangle ABC, on a :
  - $F \in [BC]$

DimaMath.com

- $E \in [AC]$
- $(EF) \parallel (AB)$ (d'après la question 1)

- D'après le théorème direct de Thalès, on a :

$$\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{EF}{AB}$$

- On en retient l'égalité :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{CF}}{\boldsymbol{BC}} = \frac{\boldsymbol{EF}}{\boldsymbol{AB}}}$$

3/ Montrons que $\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{DC}$:

- Dans le triangle BCD, on a :
  - $F \in [BC]$
  - $E \in [BD]$
  - $(EF) \parallel (DC)$ (d'après la question 1)
- D'après le théorème direct de Thalès, on a :

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DC}$$

- On en retient l'égalité :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{BF}}{\boldsymbol{BC}} = \frac{\boldsymbol{EF}}{\boldsymbol{DC}}}$$

4/ Déduisons que $\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}$:

- En additionnant membre à membre les deux égalités obtenues aux questions 2 et 3, on a :

$$\frac{CF}{BC} + \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC}$$

- Comme le point F appartient au segment $[BC]$, on sait que $CF + BF = BC$. Le membre de gauche devient donc :

$$\frac{CF + BF}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

- On obtient ainsi :

$$1 = \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC}$$

- En factorisant par EF dans le membre de droite (ou en divisant toute l'égalité par $EF \neq 0$) :

$$1 = EF\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{EF}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{AB}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{DC}}}$$

DimaMath.com

Solution Exercice 5

1/ Calcul de AC, puis de DC :

- D'après la figure, le point E appartient au segment $[AB]$, donc :

$$AB = AE + EB = 3 + 2 = 5$$

- Dans le triangle ABC, on a $E \in [AB]$, $D \in [AC]$ et $(ED) \parallel (BC)$.
D'après le théorème direct de Thalès :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$$

- En utilisant l'égalité $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ avec $AE = 3$, $AB = 5$ et $AD = 2$:

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{AC} \quad \text{donc} \quad AC = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{AC = \frac{10}{3}}}$$

- Comme le point D appartient au segment $[AC]$, on en déduit :

$$DC = AC - AD = \frac{10}{3} - 2 = \frac{10}{3} - \frac{6}{3} = \frac{4}{3}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{DC = \frac{4}{3}}}$$

2/ Calcul de ED :

- D'après l'égalité de Thalès établie à la question précédente, on a $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$.
- En remplaçant par les valeurs connues ($AE = 3$, $AB = 5$ et $BC = 3$) :

$$\frac{3}{5} = \frac{ED}{3} \quad \text{donc} \quad ED = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{ED = \frac{9}{5} = 1.8}}$$

3/ Vérifions si les droites (EC) et (AF) sont parallèles :

- Les droites (EF) et (AC) sont sécantes en D. Calculons séparément les rapports $\frac{DE}{DF}$ et $\frac{DC}{DA}$:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{1,8}{2,7} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

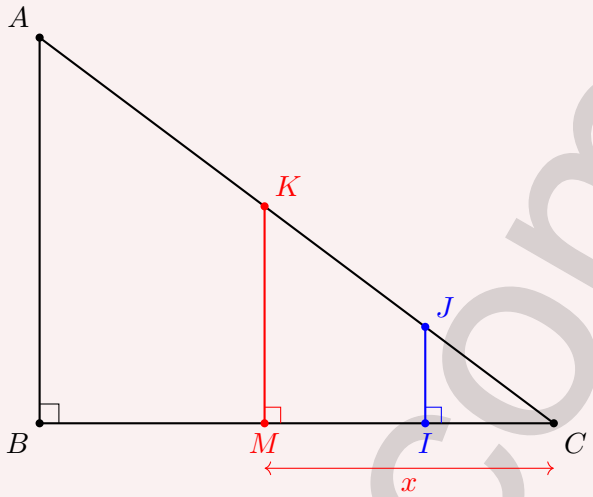
- On constate que $\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DA}$.
- De plus, les points E, D, F d'une part et C, D, A d'autre part sont alignés dans le même ordre.
- D'après la réciproque du théorème de Thalès, on conclut que **les droites (EC) et (AF) sont parallèles**.

DimaMath.com

Solution Exercice 6

1/ a) Construction de la figure :

(Note : sur la figure ci-dessous, les points I et J de la question 2 ainsi que les points M et K de la question 4 sont représentés).



b) Nature du triangle ABC :

Le côté le plus long est $[AC]$ avec $AC = 10$ cm. Calculons séparément AC^2 et $AB^2 + BC^2$:

$$AC^2 = 10^2 = 100$$

$$AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en B.**

2/ Calcul de CJ et IJ :

- Dans le triangle ABC, on a $I \in [BC]$, $J \in [AC]$ et $(IJ) \parallel (AB)$.
  D'après le théorème direct de Thalès :

$$\frac{CI}{CB} = \frac{CJ}{CA} = \frac{IJ}{AB}$$

- Or, on sait que $CI = \frac{1}{4}CB$, ce qui équivaut à $\frac{CI}{CB} = \frac{1}{4}$. On en déduit :

$$\frac{CJ}{CA} = \frac{CJ}{10} = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad CJ = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ cm}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{CJ = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}}}$$

et $\frac{IJ}{AB} = \frac{IJ}{6} = \frac{1}{4}$ donc $IJ = \frac{6}{4} = 1,5$ cm

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{IJ = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ cm}}}$$

DimaMath.com

3/ a) Calcul de MK en fonction de x :

Dans le triangle ABC, on a $M \in [CB]$, $K \in [CA]$ et $(MK) \parallel (AB)$.
D'après le théorème direct de Thalès :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} = \frac{MK}{AB}$$

En remplaçant par les valeurs connues ($CM = x$, $CB = 8$ et $AB = 6$) :

$$\frac{x}{8} = \frac{MK}{6} \quad \text{donc} \quad MK = \frac{6x}{8} = \frac{3}{4}x$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{MK = \frac{3}{4}x}}$$

b) Montrons que l'aire du triangle CMK est égale à $\frac{3x^2}{8}$:

- On sait que $(AB) \perp (BC)$ (car ABC est rectangle en B) et $(MK) \parallel (AB)$.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Donc $(MK) \perp (BC)$, soit $(MK) \perp (CM)$.
- Le triangle CMK est donc rectangle en M. Son aire vaut :

$$\mathcal{A}_{CMK} = \frac{CM \times MK}{2} = \frac{x \times \frac{3}{4}x}{2} = \frac{\frac{3x^2}{4}}{2} = \frac{3x^2}{8}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}_{CMK} = \frac{3}{8}x^2}}$$

c) Valeur de x pour que l'aire de CMK soit la moitié de celle de ABC :

- Calculons d'abord l'aire du triangle ABC rectangle en B :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

- La moitié de l'aire de ABC est égale à $\frac{24}{2} = 12$ cm^2. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{CMK} &= 12 \\ \frac{3x^2}{8} &= 12 \\ 3x^2 &= 12 \times 8 \\ 3x^2 &= 96 \\ x^2 &= \frac{96}{3} = 32 \end{aligned}$$

- Comme x représente une longueur ($x > 0$), on obtient :

$$x = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \quad (\text{soit } x \approx 5,66 \text{ cm})$$

Donc :

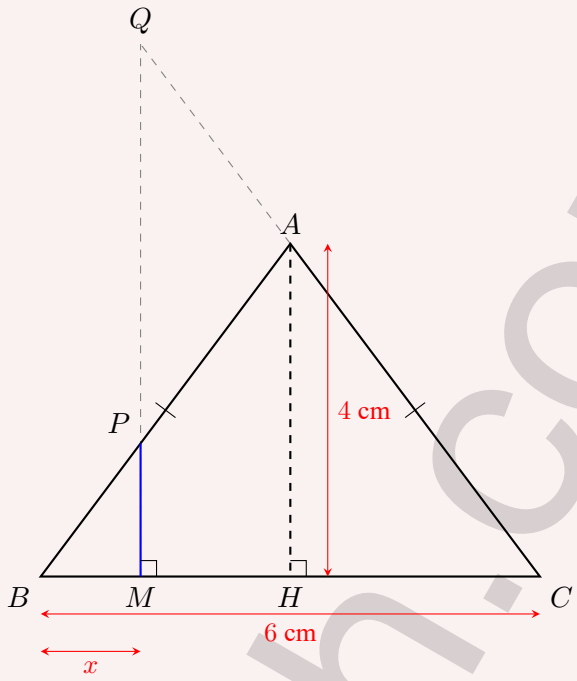
$$\boxed{\boldsymbol{x = 4\sqrt{2}\text{ cm}}}$$

DimaMath.com

Solution Exercice 7

Le triangle ABC est isocèle en A et (AH) est la hauteur issue de A, donc H est le milieu de $[BC]$. Ainsi :

$$BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}.$$



1/ Dans le triangle BAH, le point M appartient à $[BH]$ et le point P appartient à $[BA]$. De plus, $(MP) \parallel (AH)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BM}{BH} = \frac{BP}{BA} = \frac{MP}{AH}.$$

Comme $BM = x$ et $BH = 3$, on obtient :

$$\frac{MP}{AH} = \frac{BM}{BH} = \frac{x}{3}.$$

Donc $\boxed{\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{x}{3}}$

On en déduit :

$$MP = \frac{x}{3} \times AH = \frac{x}{3} \times 4 = \frac{4x}{3}.$$

D'où

$$\boxed{MP = \frac{4x}{3}}$$

2/ Le point M appartient au segment $[BC]$, donc :

$$MC = BC - BM = 6 - x.$$

Donc

$$\boxed{MC = 6 - x}$$

DimaMath.com

3/ Dans le triangle CHA, le point M appartient à $[CH]$ et le point Q appartient à $[CA]$. De plus, $(MQ) \parallel (AH)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CM}{CH} = \frac{CQ}{CA} = \frac{MQ}{AH}.$$

Comme $CM = 6 - x$ et $CH = 3$, on obtient :

$$\frac{MQ}{AH} = \frac{6-x}{3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{MQ = \frac{6-x}{3} \times 4 = \frac{4}{3}(6-x)}.}$$

4/ On cherche x tel que $MQ = 3MP$. On a :

$$MQ = \frac{4}{3}(6-x) \quad \text{et} \quad 3MP = 3 \times \frac{4x}{3} = 4x.$$

L'égalité $MQ = 3MP$ devient donc :

$$\frac{4}{3}(6-x) = 4x.$$

En multipliant par $\frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} 6 - x &= 3x \\ 6 &= 4x \\ x &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } \boldsymbol{x = \frac{3}{2}} \text{ on a : } \boldsymbol{MQ = 3MP}}$$

.

5/ D'après la question 1, on a $\frac{BP}{BA} = \frac{x}{3}$. Donc

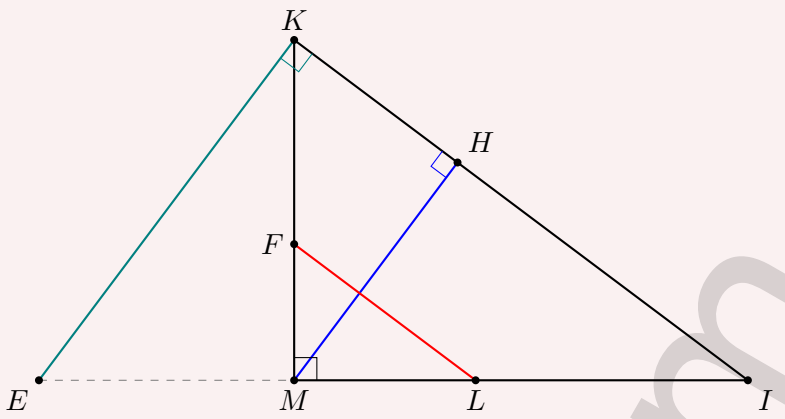
$$\text{Pour } x = \frac{3}{2} : \frac{BP}{BA} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent : $BP = \frac{1}{2}BA$. Alors : **le point P est le milieu du segment $[AB]$.**

Solution Exercice 8

1/ Construction du triangle IMK

DimaMath.com



2/ IMK est un triangle rectangle On calcule :

$$IK^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$$

et

$$IM^2 + MK^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25.$$

Comme $IK^2 = IM^2 + MK^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle IMK est rectangle en M.**

3/ Justifier que $MH = 3.6$cm

L'aire du triangle IMK peut se calculer de deux façons, en prenant $[IM]$ puis $[IK]$ comme base :

$$\mathcal{A}_{IMK} = \frac{IM \times MK}{2} = \frac{IK \times MH}{2}.$$

Donc :

$$MH = \frac{IM \times MK}{IK} = \frac{6 \times 4{,}5}{7{,}5} = \frac{27}{7{,}5} = 3{,}6 \text{ cm}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{MH = 3\,,\,6} \text{ cm}}$$

4/ Dans le triangle IHK rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore $IM^2 = IH^2 + MH^2$, donc $IH^2 = IM^2 - MH^2 = 6^2 - (3.6)^2 = 36 - 12.96 = 23.04 = (4.8)^2$. Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{IH = 4{,}8} \text{ cm}}.$$

Comme H appartient à $[IK]$, alors :

$$KH = IK - IH = 7{,}5 - 4{,}8 = 2{,}7 \text{ cm}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{KH = 2{,}7} \text{ cm}}.$$

5/ $(LF) \parallel (IK)$ et calcul de LF

On a $ML = IM - IL = 6 - 3{,}6 = 2{,}4$ cm.

Comme $KF = \frac{3}{5}MK = \frac{3}{5} \times 4{,}5 = 2{,}7$ cm, on obtient $MF = MK - KF = 4{,}5 - 2{,}7 = 1{,}8$ cm.

On calcule les rapports :

$$\frac{ML}{MI} = \frac{2{,}4}{6} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{MF}{MK} = \frac{1{,}8}{4{,}5} = \frac{2}{5}.$$

DimaMath.com

Or les points M , L et I d'une part et sont alignés avec M, de même que M , F et K d'autres parts sont alignés dans le même ordre et comme $\dfrac{ML}{MI} = \dfrac{MF}{MK}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, $\boxed{(LF) \parallel (IK)}$.

De plus, le théorème de Thalès donne $\dfrac{LF}{IK} = \dfrac{ML}{MI} = \dfrac{2}{5}$. Donc :

$$\boxed{LF = \frac{2}{5} \times 7{,}5 = 3 \text{ cm}}.$$

6/ $(MH) \parallel (KE)$ et calcul de ME et EK

La droite (KE) est perpendiculaire à (IK) et la droite (MH) est perpendiculaire à (IK). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $\boxed{(MH) \parallel (KE)}$.

Les droites (EM) et (KH) se coupent au point I et $(MH) \parallel (KE)$, alors d'aaprès le théorème direct de Thalès on a : $\dfrac{IK}{IH} = \dfrac{IE}{IM} = \dfrac{EK}{HM}$, donc : $\dfrac{7.5}{4.8} = \dfrac{IE}{6} = \dfrac{EK}{3.6}$.

En utilisant la première égalité $\dfrac{7.5}{4.8} = \dfrac{IE}{6}$ on a : $IE = \dfrac{7.5 \times 6}{4.8} = 9{,}375$.

Or les points I , M et E sont alignés donc $ME = IE - IM = 9{,}375 - 6 = 3{,}375$cm.

En utilisant la deuxième égalité $\dfrac{7.5}{4.8} = \dfrac{EK}{3.6}$, on a : $EK = \dfrac{7.5 \times 3.6}{4.8} = 5{,}625$cm. Donc :

$$\boxed{ME = 3{,}375\text{cm} \quad \text{et} \quad KE = 5{,}625 \text{ cm}}.$$

7/ Dans le quadrilatère $MEKH$ les côtés (MH) et (EK) sont parallèles. De plus,H appartient à la droite (IK) Donc les droites (IK) et (HK) sont confondues et puisque $(IK) \perp (MH)$, alors $(HK) \perp (MH)$. Par conséquent le quadrilatère $MEKH$ est un trapèze rectangle en H et en K de bases $[MH]$ et $[EK]$ de hauteur $[HK]$.

Son aire est :

$$\mathcal{A} = \frac{(MH + EK) \times HK}{2} = \frac{(3{,}6 + 5{,}625) \times 2{,}7}{2} = \frac{9{,}225 \times 2{,}7}{2} = 12{,}45375 \approx 12{,}45 \text{ cm}^2.$$

Son périmètre est :

$$\mathcal{P} = ME + EK + KH + HM = 3{,}375 + 5{,}625 + 2{,}7 + 3{,}6 = 15{,}3 \text{ cm}.$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = 12{,}45375 \text{ cm}^2 \quad ; \quad \mathcal{P} = 15{,}3 \text{ cm}}$$

Solution Exercice 9

1/ **a)** Calcul de AC

Le champ $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10000.$$

Donc

$$\boxed{AC = \sqrt{10000} = 100}$$

.

Dimamath.com

b) Montrons que $BM = 70$ et $BN = 42$

Les points M et A sont sur la droite (BA), et N et C sont sur la droite (BC). Comme $(MN) \parallel (AC)$, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}.$$

On calcule d'abord $BM = AB - AM = 80 - 24 = 56$. Alors :

$$BN = BC \times \frac{BM}{BA} = 60 \times \frac{56}{80} = 42,$$

$$MN = AC \times \frac{BM}{BA} = 100 \times \frac{56}{80} = 70.$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{BM = 70 \quad , \quad BN = 42}}$$

2/ Calcul de IJ

On a I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[BC]$ montrons que $(IJ) \parallel (AC)$.

En effet les points B , I et A d'une part et les points B , J et C d'autres parts sont alignés dans le même ordre et on a : $\frac{BI}{BA} = \frac{BM + MI}{80} = \frac{56 + 12}{80} = \frac{68}{80} = \frac{17}{20} = 0{,}85$ et $\frac{BJ}{BC} = \frac{BN + NJ}{60} = \frac{42 + 9}{60} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20} = 0.85$.

Donc $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC}$. Alors d'après la réciproque du théorème de Thalès $5IJ)$ (AC)

Donc d'après le théorème direct de Thalès $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \frac{IJ}{AC} = 0.85$. Donc

$$\boxed{\boldsymbol{IJ = 0.85 \times 100 = 85}}$$

3/ **a)** Aire de la route principale

La route principale est le trapèze $AMNC$. Son aire est celle du triangle ABC privée de celle du triangle MBN, rectangle en B.

Aire de ABC :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{80 \times 60}{2} = 2400.$$

Aire de MBN :

$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{BM \times BN}{2} = \frac{56 \times 42}{2} = 1176.$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A} = 2400 - 1176 = 1224.}}$$

b) Largeur de la route principale

L'aire de la route principale est égale au produit de sa longueur IJ par sa largeur $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{A} = IJ \times \mathcal{L}, \quad \text{donc} \quad \mathcal{L} = \frac{\mathcal{A}}{IJ} = \frac{1224}{85} = 14{,}4.$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{L} = 14{,}4}}$$

4/ **a)** Le point H appartient au segment $[DC]$, donc $DC = DH + HC$, soit :

$$CH = DC - DH = 80 - 17{,}5 = 62{,}5 \text{ cm}.$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{CH = 62{,}5} \text{ cm}}$$

DimaMath.com

b) Les points F et H sont sur la même demi-droite d'origine C (sur $[DC]$), et les points E et G sont sur une autre demi-droite d'origine C (sur $[CA]$).

Calculons les rapports :

$$\frac{CF}{CH} = \frac{25}{62{,}5} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{CE}{CG} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Ces rapports sont égaux. D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EF) et (GH) sont parallèles**.

Solution Exercice 10

1/ Cas particulier où $AE = 3$ cm

a) Calcul de AC :

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 12$ cm et de largeur $BC = 9$ cm.
Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$$

Comme $AC > 0$, on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{AC = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}}}$$

b) Calcul de AF :

Dans le triangle ABC, le point E appartient au côté $[AB]$, le point F appartient au côté $[AC]$ et la droite (EF) est parallèle à (BC).
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

En remplaçant par les valeurs connues ($AE = 3$ cm, $AB = 12$ cm et $AC = 15$ cm) :

$$\frac{3}{12} = \frac{AF}{15} \quad \text{donc} \quad AF = \frac{3 \times 15}{12} = \frac{45}{12} = 3{,}75 \text{ cm}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{AF = 3{,}75 \text{ cm}}}$$

2/ Démonstration du parallélisme $(EG) \parallel (BD)$

Dans le triangle ACD, le point F appartient à $[AC]$, le point G appartient à $[AD]$ et la droite (FG) est parallèle à (CD). D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC}$$

Or, d'après la question 1.b), on a déjà établi dans le triangle ABC que :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

Par transitivité de l'égalité, on en déduit que :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}$$

De plus, les points A, E, B d'une part et A, G, D d'autre part sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès appliquée au triangle ABD, on conclut que :

$$\boxed{\boldsymbol{(EG) \parallel (BD)}}$$

DimaMath.com

3/ Cas général où $AE = x$

a) Encadrement de x :

Le point E se déplace sur le segment $[AB]$ de longueur $AB = 12$ cm.
La valeur minimale de x est 0 (lorsque E est confondu avec A) et sa valeur maximale est 12 (lorsque E est confondu avec B). Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{0 \leq x \leq 12}}$$

b) Expression de AG en fonction de x :

D'après la relation de Thalès établie à la question 2) dans le triangle ABD (avec $AB = 12$ cm et $AD = BC = 9$ cm) :

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow \frac{AG}{9} = \frac{x}{12}$$

On isole AG :

$$\boxed{\boldsymbol{AG = \frac{9}{12}x = \frac{3}{4}x}}$$

c) Périmètre du rectangle $AEFG$ en fonction de x :

Le quadrilatère $AEFG$ possède trois angles droits (en A, en E car $(EF) \parallel (BC) \perp (AB)$, et en G car $(FG) \parallel (CD) \perp (AD)$) ; c'est donc bien un rectangle.
Son périmètre $\mathcal{P}(x)$ vaut :

$$\mathcal{P}(x) = 2 \times (AE + AG)$$
$$\mathcal{P}(x) = 2 \times \left(x + \frac{3}{4}x\right)$$
$$\mathcal{P}(x) = 2 \times \frac{7}{4}x = \frac{7}{2}x = 3{,}5x \text{ cm}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}(x) = 3{,}5\,x}}$$

DimaMath.com